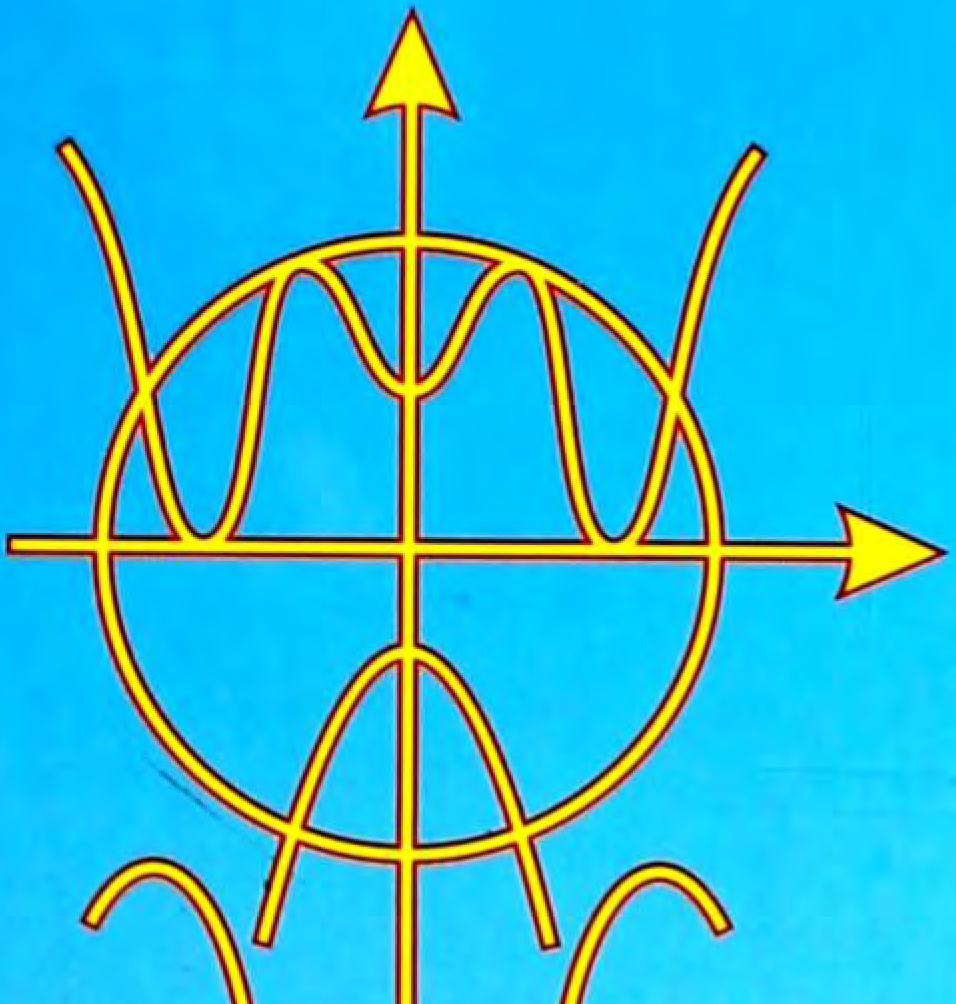
М. Иманалиев
А. Асанов
К. Жусупов
С. Искандаров

АЛГЕБРА



9

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН МАМЛЕКЕТТИК ГЕРБИ

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН МАМЛЕКЕТТИК ЖЕЛЕГИ

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН МАМЛЕКЕТТИК ГИМНИ

Сөзү: *Ж. Садыков, Ш. Кулуевдики*
Муз.: *Н. Давлесов, К. Молдобасановдуку*

Ак мөңгүлүү аска-зоолор, талаалар,
Элибиздин жаны менен барабар.
Сансыз кылым Ала-Тоосун мекендеп,
Сактап келди биздин ата-бабалар.

Кайырма: Алгалай бер, кыргыз эл,
Азаттыктын жолунда.
Өркүндөй бер, өсө бер,
Өз тагдырың колуңда.

Байыртадан бүткөн мүнөз элиме,
Досторуна даяр дилин берүүгө,
Бул ынтымак эл бирдигин ширетип,
Бейкуттукту берет кыргыз жерине.

Кайырма:

Аткарылып элдин үмүт тилеги,
Желбиреди эркиндиктин желеги.
Бизге жеткен ата салтын, мурасын,
Ыйык сактап, урпактарга берели.

Кайырма:

М. ИМАНАЛИЕВ, А. АСАНОВ,
К. ЖУСУПОВ, С. ИСКАНДАРОВ

Алгебра

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
9-классы үчүн окуу китеби

Оңдолуп, үчүнчү басылышы

*Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим
министрлиги бекиткен*

«Билим-компьютер»
Бишкек – 2012

УДК 373.167.1
ББК 22.14 я 721
А 45

Бул окуу китебинин 2-басылышы 2006-жылы чыккан.

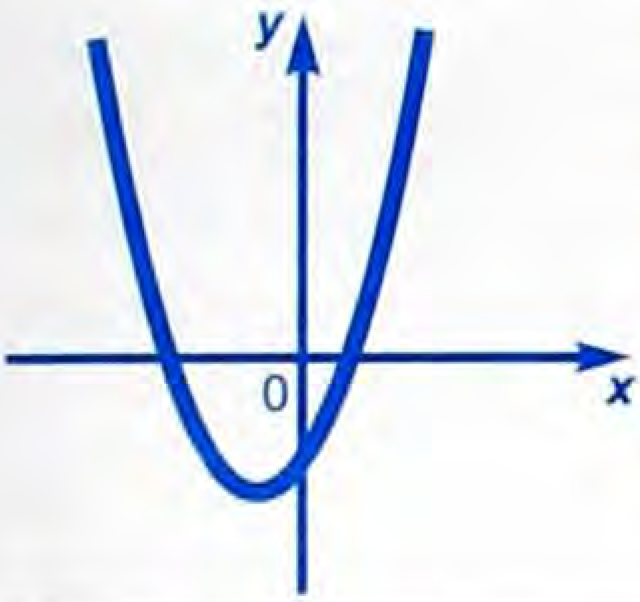
А 45 **Алгебра:** Жалпы билим берүүчү орто мектептин 9-кл. үчүн окуу китеби /М. Иманалиев, А. Асанов, К. Жусупов, С. Искандаров. – Онд., 3-бас. – Б.: «Билим-компьютер», 2012.– 224 б.

ISBN 978-9967-452-50-3

А 4306020503 – 12

УДК 373.167.1
ББК 22.14 я 721

ISBN 978-9967-452-50-3



I ГЛАВА

КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ

---

§ 1. ФУНКЦИЯЛАР

1. Функция, функциянын аныкталуу областы жана маанилеринин областы

Функция негизги математикалык түшүнүктөрдүн бири.

1 - аныктама. **Эгерде кандайдыр бир сан көптүгүнүн каалагандай x маанисине берилген эреже аркылуу** (ал эрежени f деп белгилейли) **$y=f(x)$ саны туура келсе, анда бул сан көптүгүндө функция аныкталган деп эсептейбиз.**

Мында x өзгөрмөсүн *көз каранды эмес өзгөрмө* же *аргумент* деп аташат. Ал эми y өзгөрмөсүн *көз каранды өзгөрмө* деп аташат. Башкача айтканда y өзгөрмөсү x өзгөрмөсүнөн функция болуп эсептелет жана аны кыскача $y=f(x)$ деп жазышат. $y=f(x)$ түрүндөгү жазууда f тин ордуна башка: g, φ, ψ ж.б. тамгалар да колдонулат. Берилген f эрежеси аркылуу $y=f(x)$ саны аныктала турган x сандарынын көптүгүн функциянын *аныкталуу областы* деп аташат.

Көз каранды y өзгөрмөсүнүн кабыл алган маанилери *функциянын маанилери* деп аталат. Функциянын маанилеринин көптүгүн *функциянын маанилеринин областы* деп атайбыз.

Мисалы, функция $y=\frac{4x^4+2}{x^2}$ формуласы (эрежеси) аркылуу берилсин деп эсептейли. Анда $f(x)=\frac{4x^4+2}{x^2}$ деп жазууга болот. Мисалы x тин 2; $\frac{5}{2}$; -1ге барабар болгон маанилери үчүн функциянын $f(2)$, $f(\frac{5}{2})$, $f(-1)$ маанилерин табабыз:

$$f(2)=\frac{4\cdot 2^4+2}{2^2}=\frac{33}{2}=16{,}5\,; \quad f(\tfrac{5}{2})=\frac{4\cdot(\frac{5}{2})^4+2}{(\frac{5}{2})^2}=25\frac{8}{25}\,; \quad f(-1)=\frac{4\cdot(-1)^4+2}{(-1)^2}=6\,.$$

Ал эми $f(x)=\frac{4x^4+2}{x^2}$ функциясынын аныкталуу областынын кызматын $x=0$ дөн башка бардык сандардын көптүгү аткарат.

Бул функциянын маанилеринин областы болуп $4\sqrt{2}$ ден кичине эмес бардык оң сандардын көптүгү эсептелет. Себеби $f(x)= 4\sqrt{2} +(2x-\frac{\sqrt{2}}{x})^2 \geq 4\sqrt{2}$.

1-мисал. Функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла:

1) $f(x)=4x^3+x+2$; 2) $f(x)=\frac{x-2}{x+4}$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-6}$; 4) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$.

1) $4x^3+x+2$ туюнтмасы ар кандай x саны үчүн мааниге ээ болгондуктан, функция бардык x үчүн аныкталат.

Жообу: x — каалаган анык сан.

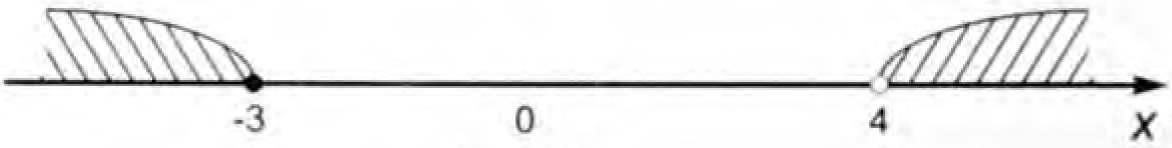
2) $\frac{x-2}{x+4}$ туюнтмасы $x+4\neq0$ болгондо мааниге ээ болот. Демек, функция $x\neq-4$ болгондо аныкталат.

Жообу: $x\neq-4$.

3) $\sqrt{2x-6}$ туюнтмасы $2x-6\geq0$ болгондо мааниге ээ болот. Демек, функция $x\geq3$ болгондо аныкталат.

Жообу: $x\geq3$.

4) $\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$ туюнтмасы $\frac{x+3}{x-4}\geq0$ болгондо мааниге ээ болот. Бул барабарсыздыктын чыгарылышы (1-сүрөт) $x\leq-3$ жана $x>4$ болот. Демек, функция $x\leq-3$ жана $x>4$ болгондо аныкталат.



1-сүрөт.

Жообу: $x\leq-3$ жана $x>4$.

Реалдуу процессти сүрөттөөчү функциянын аныкталуу областы, ал процесстин өтүшүнүн айкын шарттарынан көз каранды болот. Темир зымынын l узундугунун t ысуу температурасынан көз карандылыгы $l=l_0(1+\alpha t)$ формуласы аркылуу туюнтулат, мында l_0 — темир зымынын баштапкы узундугу, ал эми α — сызыктуу кеңейүү коэффициенти. Бул формуладагы l узундугу t нын каалагандай маанилерине карата тиешелүү мааниге ээ болот. Бирок $l = l(t)$ функциясынын аныкталуу областы болуп сызыктуу кеңейүү закону туура болгондой бир нече ондогон градустар эсептелет.

2-аныктама. **Функциянын графиги деп, абсциссалары аргументтин маанилерине барабар, ал эми ординаталары — функциянын ал аргументтин маанилерине туура келүүчү маанилери болгон координата тегиздигинин чекиттеринин көптүгү эсептелет.**

2-мисал. $y=\sqrt{x}$ функциясынын графигин түзгүлө.

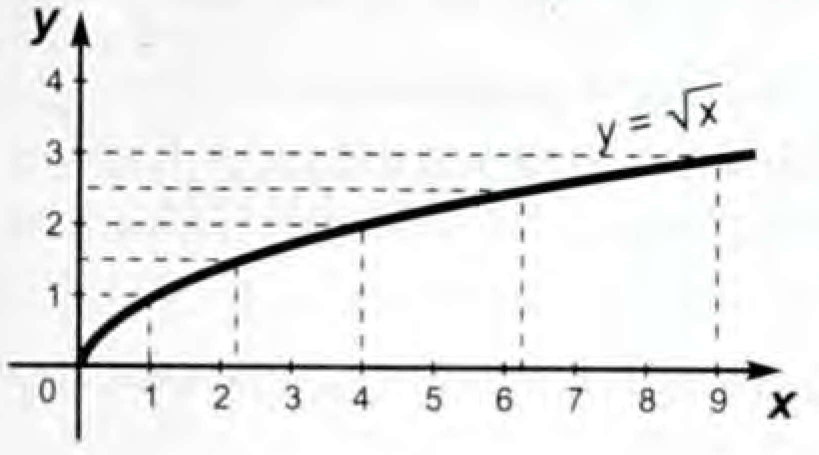
$\sqrt{x}$ туюнтмасы $x\geq 0$ болгондо мааниге ээ болот. Демек, функция $x\geq 0$ болгондо аныкталат. Берилген функциянын маанилеринин таблицасын түзөбүз.

x	0	1	2,25	4	6,25	9
$y=\sqrt{x}$	0	1	1,5	2	2,5	3

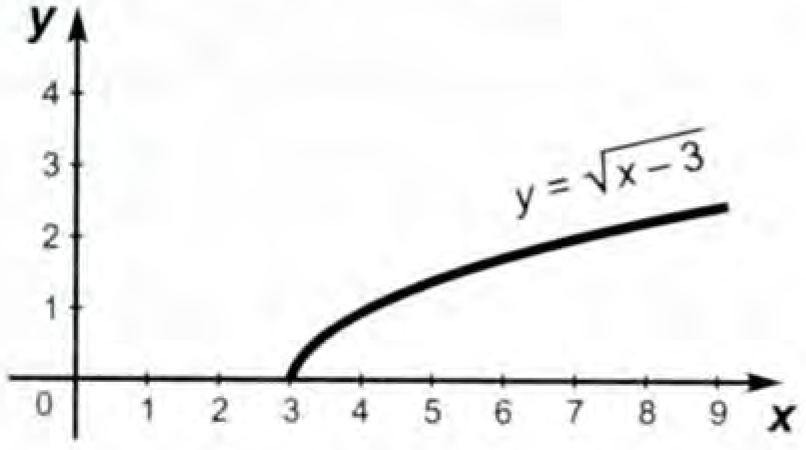
Координаталары таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди белгилеп, аларды жылма (туташ) сызык менен туташтырсак, функциясынын графигин алабыз (2-сүрөт).

3-мисал. $y=\sqrt{x-3}-4$ функциясынын графигин түзгүлө.

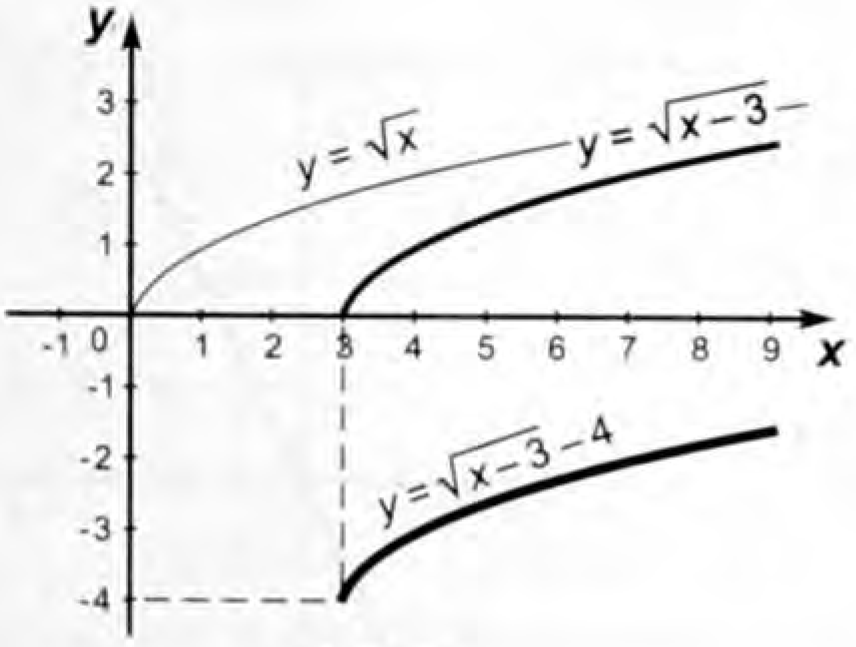
Берилген функция $x\geq 3$ болгондо аныкталат. $y=\sqrt{x-3}$ функциясынын графиги $y=\sqrt{x}$ функциянын графигинен Ox огу боюнча үч бирдикке оң жакка жылдыруудан алынат (3-сүрөт).



2-сүрөт.



3-сүрөт.



4-сүрөт.

$y=\sqrt{x-3}-4$ функциясынын графигин алыш үчүн, $y=\sqrt{x-3}$ функциясынын графигин төрт бирдикке төмөн көздөй жылдыруу жетиштерлик болот (4-сүрөт).

4-мисал. $y=|x|$ функциясынын графигин түзгүлө.

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ эгер } x\geq 0, \\ -x, \text{ эгер } x<0, \end{cases}$$

экендигин эске салабыз. Мында $|x|$ туюнтмасы каалаган x саны үчүн мааниге ээ. Демек, бул функциянын аныкталуу областы болуп, бардык чыныгы сандардын көптүгү эсептелет.

Эгерде $x\geq 0$ болсо, анда $|x|=x$, демек, $x\geq 0$ болгондо $y=|x|$ функциясынын графиги I координаттык бурчтун биссектрисасы болот.

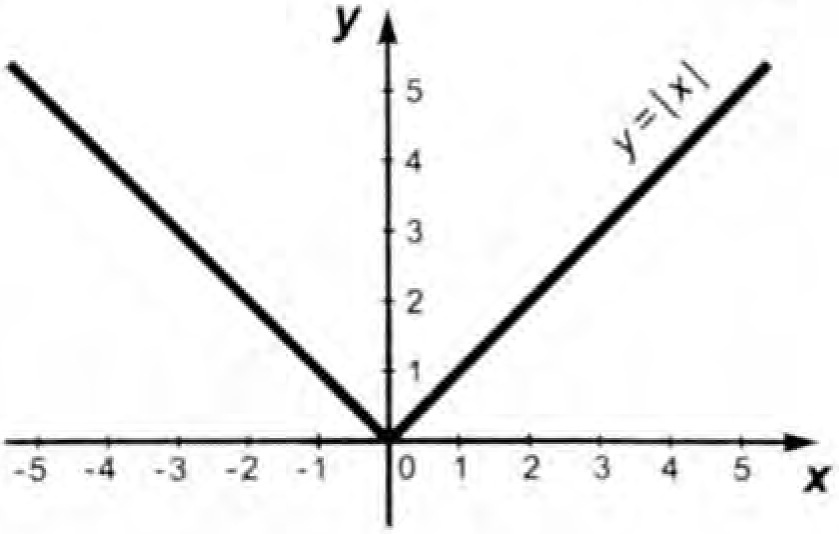
Эгерде $x<0$ болсо, анда $|x|=-x$, демек, $x<0$ болгондо $y=|x|$ функциясынын графиги II координаттык бурчтун биссектрисасы болот. $y=|x|$ функциянын графиги координата башталышынан чыгышкан I жана II координаттык бурчтардын биссектрисалары болуп эсептелишкен эки шооладан турат (5-сүрөт).

Силер 7—8-класстардын алгебра курстарынан түз пропорциялуулук жана тескери пропорциялуулук функциялары менен таанышкансыңар. Түз пропорциялуулук $y=kx$ формуласы менен берилет, мында $k\neq0$; тескери пропорциялуулук $y=\frac{k}{x}$ формуласы менен берилет, мында $k\neq0$.

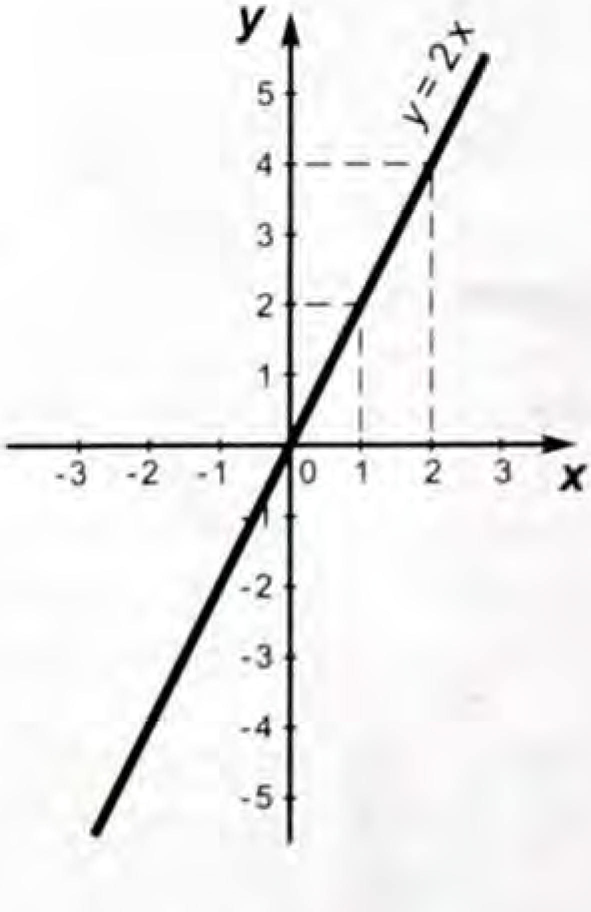
Мындай түрдөгү функциялар көп реалдуу процесстерди жана закон ченемдүүлүктөрдү сүрөттөп көрсөтүшөт. Мисалы, түз пропорциялуулук болуп, тыгыздык ρ турактуу болгондо нерсенин (телонун) массасынын анын V көлөмүнөн көз карандылыгы ($m=\rho V$), айлананын C узундугунун анын R радиусунан көз карандылыгы ($C=2\pi R$) эсептелет. Тескери пропорциялуулук болуп, U чыңалышы турактуу болгондо чынжырдын бөлүгүндөгү I ток күчүнүн өткөргүчтүн R каршылыгына көз карандылыгы ($I=\frac{U}{R}$), берилген S жолун басып өтүүдө бир калыпта кыймылда болгон нерсе короткон t убакыттын кыймылдын ϑ ылдамдыгынан көз карандылыгы ($t=\frac{S}{\vartheta}$) эсептелет.

$y=kx$ функциясынын графигинин кызматын координаталар башталышынан өткөн түз сызык аткарат.

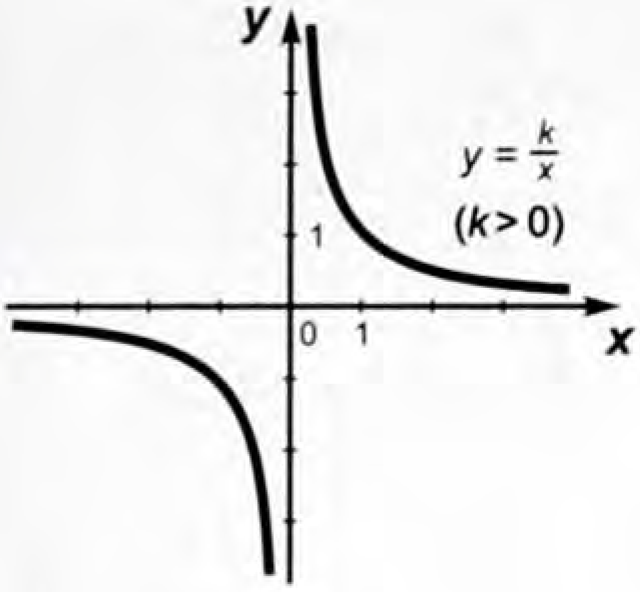
6-сүрөттө $y=2x$ функциясынын графиги көрсөтүлгөн.



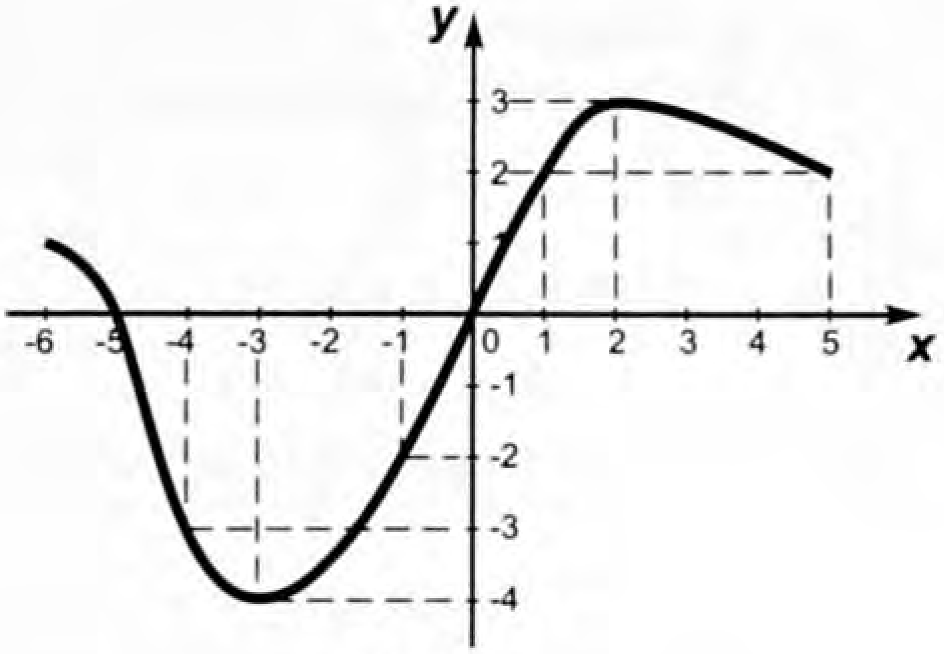
5-сүрөт.



6-сүрөт.



7-сүрөт.



8-сүрөт.

$y=\frac{k}{x}$ функциясынын графиги *гипербола* деп аталат. 7-сүрөттө $y=\frac{k}{x}$ функциясынын графиги $k>0$ үчүн көрсөтүлгөн. Бул функциянын аныкталуу областы нөлдөн башка бардык сандардын көптүгү болот. Бул көптүк анын *маанилеринин областы* да болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Функция $f(x)=4x^2+10x-6$ формуласы менен берилген.

а) $f(-2)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f(\frac{1}{2})$ ди тапкыла.

2. Эгер $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ болсо, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1{,}5)$, $f(3)$тү тапкыла.

3. Төмөндөгү формула менен берилген функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=10x+2$; в) $y=\frac{3x+1}{x-2}$; д) $y=\frac{x}{(x-2)(1-x)}$;

б) $y=x^3-4x+2$; г) $y=\frac{5}{4-x^2}$; е) $y=\sqrt{x-7}$.

4. Эгер:

а) $f(x)=-3x+7$; в) $f(x)=x^2-x+2$;

б) $f(x)=x^2-10x+1$; г) $f(x)=x-\frac{8}{x}+1$

болсо, $f(x)=-8$ болгондогу x тин маанисин тапкыла.

5. 8-сүрөттө $y=f(x)$ функциясынын графиги түзүлгөн, анын аныкталуу областы болуп $[-6; 5]$ сегменти эсептелет. Графиктин жардамы менен төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) $f(-4)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(5)$;

б) $f(x)=4$, $f(x)=-4$, $f(x)=0$ болгондогу x тин маанисин;

в) функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин;
г) функциянын маанилеринин областын.

6. $(-2; 1)$ чекити:

а) $y = 3x^2 + 2x + 29$; в) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$;

б) $y = |4 - 3x| - 9$; г) $y(x) = |\sqrt{2-x} - 5| - 2$

функциянын графигинде жатабы?

7.
$$P(t) = \begin{cases} \text{эгерде } 0 \le t < 40 \text{ болсо, } 2t + 20, \\ \text{эгерде } 40 \le t < 60 \text{ болсо, } 100, \\ \text{эгерде } 60 \le t \le 150 \text{ болсо, } -\frac{2}{3}t + 40 \end{cases}$$

формуласынын жардамы менен чакадагы суунун температурасынын өзгөрүшүнүн t убактысынан (минута менен) көз карандылыгы берилген. $P(20)$; $P(40)$; $P(50)$; $P(90)$ду тапкыла. $P = P(t)$ функциясынын графигин түзгүлө, $[0; 40]$, $[40; 60]$, $[60; 150]$ сегменттеринин (аралыктарынын) ар биринде каралып жаткан процесс кандай физикалык мааниге ээ болот?

8. Төмөндөгү формула менен берилген функциянын графигин түзгүлө:

а) $f(x)=2,5-4x$; в) $f(x)=-|x|$; д) $f(x)=|x+3|+2$;

б) $f(x)=\frac{5}{x}$; г) $f(x)=-\frac{10}{x}$; е) $f(x)=2|x|+1$.

9. а) $y=x^3-8x$ (мында $-3 \le x \le 3$);

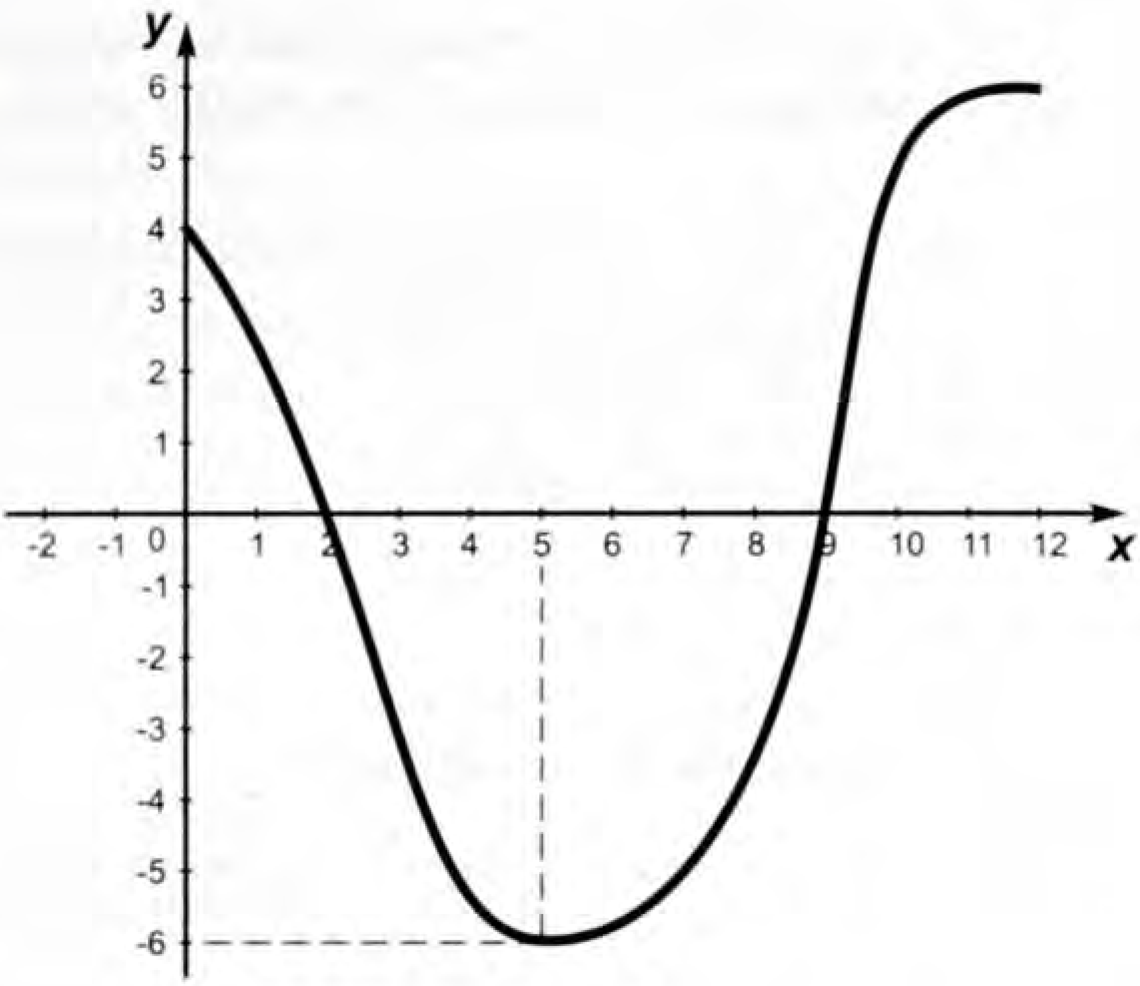
б) $y=\frac{4}{x+2}$ (мында $-1,5 \le x \le 6$) формуласы менен берилген функциянын маанилеринин таблицасын жана графигин түзгүлө.

2. Функциянын нөлү. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар

9-сүрөттө абанын P температурасынын жарым сутканын ичинде өзгөрүшүнүн t убактысынан (саат менен) көз карандылыгынын графиги көрсөтүлгөн.

Биз мындан саат 2де жана саат 9да температура нөлгө барабар болгондугун, алгачкы беш сааттын ичинде температура төмөндөгөнүн жана андан кийин температура саат 5тен 12ге чейин жогорулагандыгын байкайбыз.

Биз бул график менен берилген функцияны $P=P(t)$ деп белгилейли. Функция $P(t)$ нөлгө айлануучу аргументтин маанилерин функциянын нөлдөрү деп аташат. $t=2$ жана $t=9$ каралып жаткан $P(t)$ функциясынын нөлдөрү.



9-сүрөт.

0дөн 5ке чейин t чоңойгондо P нин мааниси кичирейери, ал эми 5тен 12ге чейин t чоңойгондо P нин мааниси да чоңоёру графиктен көрүнүп турат. Ошондуктан $P = P(t)$ функциясы $[0; 5]$ сегментте кемүүчү, ал эми $[5; 12]$ сегментте өсүүчү болуп эсептелет деп айтылат.

1 - *аныктама.* **$y = f(x)$ функциясы нөлгө айлануучу аргументтин маанилерин, $y = f(x)$ функциясынын нөлдөрү деп айтабыз.**

2 - *аныктама.* **Эгерде кандайдыр бир аралыктан алынган аргументтин чоң маанисине $y = f(x)$ функциясынын чоң мааниси туура келсе, анда ал аралыкта функция өсүүчү деп аталат.**

3 - *аныктама.* **Эгерде кандайдыр бир аралыктан алынган аргументтин чоң маанисине $y = f(x)$ функциясынын кичине мааниси туура келсе, анда ал аралыкта функция кемүүчү деп аталат.**

Башкача айтканда, эгерде кандайдыр бир аралыкта жаткан x_1 үчүн $f(x_1)$=0 барабардыгы аткарылса, анда x_1 санын y=$f(x)$ функциясынын нөлү деп аташат; эгерде кандайдыр бир аралыктан алынган каалагандай x_1 жана x_2 үчүн x_2>x_1 болгондо $f(x_2) > f(x)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда y=$f(x)$ функциясын ал аралыкта өсүүчү деп аташат; эгерде кандайдыр аралыктан алынган каалагандай x_1 жана x_2 үчүн x_2>x_1 болгондо $f(x_2) < f(x_1)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда $y = f(x)$ функциясын ал аралыкта кемүүчү деп аташат.

Эгерде функция бүткүл аныкталуу областында өссө, анда аны өсүүчү функция деп аташат, ал эми кемисе, анда кемүүчү функция деп аташат.

Мисалы, $y=x+1$ функциясы бардык сан огунда өсүүчү функция. Ал эми $y=x^2$ функциясы $x\geq 0$ областында өсөт, $x\leq 0$ областында кемийт.

1 - мисал. $y(x)=\sqrt{x}-2$ функциясынын нөлдөрүн тапкыла.

$y(x)=\sqrt{x}-2$ функциясы $x\geq 0$ областында аныкталган. Берилген функция $x\geq 0$ областында өсүүчү функция жана $y(4)=\sqrt{4}-2=0$. Демек, $x=4$, $y(x)=\sqrt{x}-2$ функциясынын жалгыз нөлү болот.

2 - мисал. $y=x+\frac{1}{x}$ функциясы $0<x<1$ областында кемүүчү функция экендигин далилдегиле.

$0<x_1<x_2<1$ болгондо, $y(x_2)<y(x_1)$ болорун көрсөтүшүбүз керек. Ал үчүн $y(x_2)-y(x_1)$ айырмасын карайбыз:

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-(x_1+\frac{1}{x_1})=-(x_2-x_1)(\frac{1}{x_1x_2}-1).$$

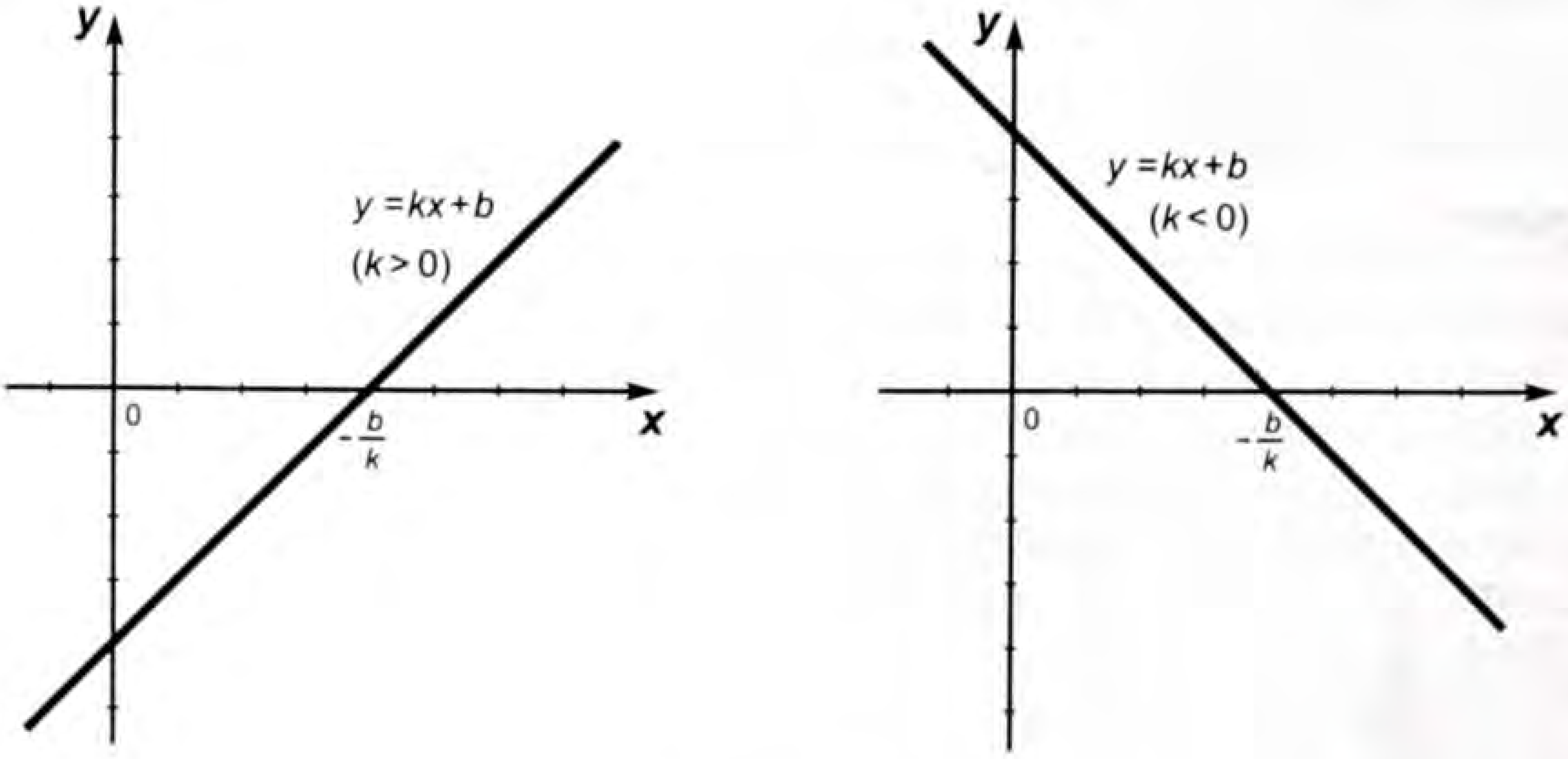
Мында $x_2-x_1>0$, $\frac{1}{x_1x_2}>1$ анткени $0<x_1<x_2<1$. Анда

$$y(x_2)-y(x_1)<0 \Rightarrow y(x_2)<y(x_1).$$

3 - мисал. $y=kx+b$ функциясынын нөлдөрүн, өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла. Мында $k\neq 0$.

$kx+b=0$ теңдемесин чыгарып, $x=-\frac{b}{k}$ болорун табабыз. Демек, $x=-\frac{b}{k}$, $y=kx+b$ функциясынын жалгыз нөлү болот. Эми $x_2>x_1$ болгон каалагандай x_1 менен x_2 сандары үчүн $y(x_2)-y(x_1)$ айырмасын карайбыз:

$$y(x_2)-y(x_1)=(kx_2+b)-(kx_1+b)=k(x_2-x_1).$$



10-сүрөт.

Мында x_2-x_1 көбөйтүндүсү он, анткени $x_2>x_1$. Ошондуктан $k(x_2-x_1)$ көбөйтүндүсүнүн белгиси k коэффициентинин белгиси аркылуу аныкталат.

Эгерде $k>0$ болсо, анда $k(x_2-x_1)>0$ жана $y(x_2)>y(x_1)$. Демек, $k>0$ болгондо $y=kx+b$ функциясы өсүүчү болуп эсептелет.

Эгерде $k<0$ болсо, анда $k(x_2-x_1)<0$ жана $y(x_2)<y(x_1)$. Демек, $k<0$ болгондо $y=kx+b$ функциясы кемүүчү болуп эсептелет. $y=kx+b$ функциясынын графиги 10-сүрөттө көрсөтүлгөн.

КӨНҮГҮҮЛӨР

10. Төмөндөгү функциялардын нөлдөрүн тапкыла (эгерде алар бар болсо):

а) $y=4x-16$;

б) $y=\frac{6+3x}{x^2+1}$;

в) $y=\frac{14x+7}{x-1}$;

г) $y=\frac{7}{(x-2)(x+5)}$.

11. Төмөндөгү функциялардын нөлдөрүн, өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла:

а) $y=4x+5$;

б) $y=3-2x$;

в) $y=x^2+4$;

г) $y=4-x^2$;

д) $y=(2-x)^2$;

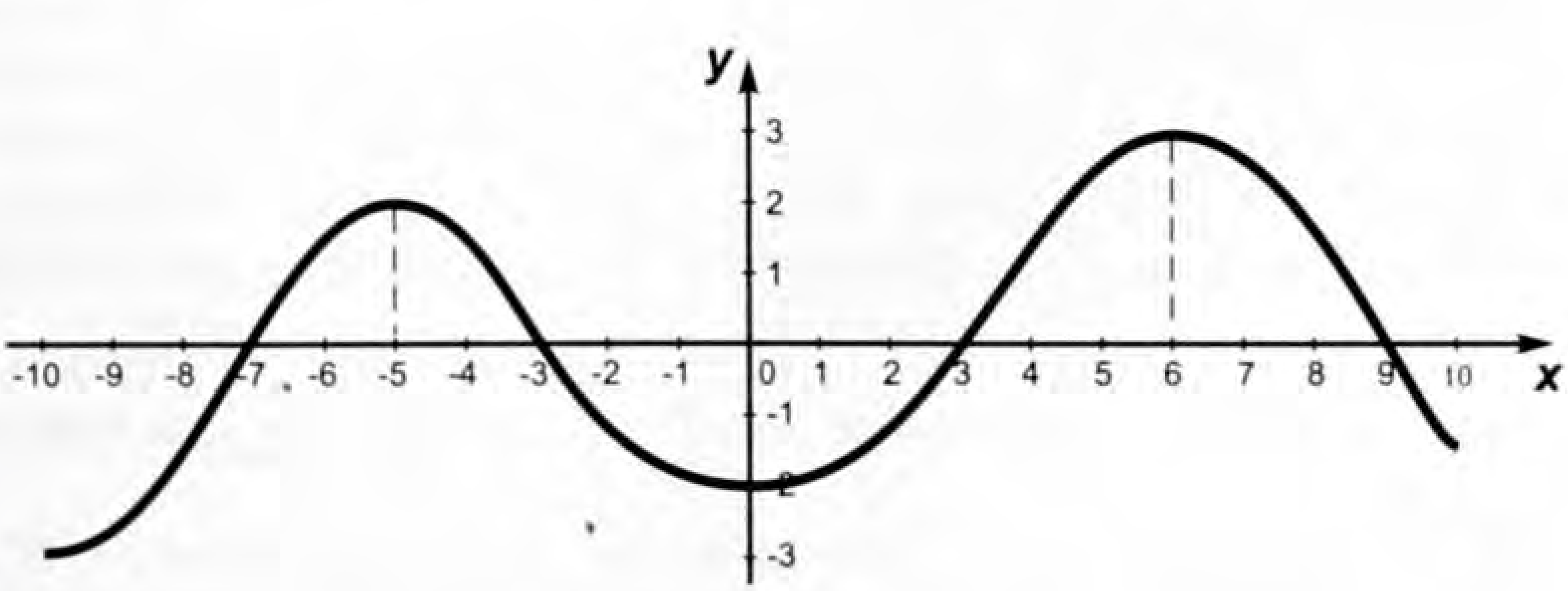
е) $y=(3+x)^2$.

12. 11-сүрөттө $y=f(x)$ функциясынын графиги көрсөтүлгөн, мында $-10\le x\le 10$. а) функциянын нөлдөрүн; б) функция өсүүчү аралыктарды; в) функция кемүүчү аралыктарды; г) функция оң маанилерди кабыл алуучу аралыктарды аныктагыла.

13. Аныкталуу областы $[-5; 6]$ болгон функциянын графигин чийгиле, ал функция:

а) $[-5; 0]$ аралыкта өсүүчү жана $[0; 6]$ аралыкта кемүүчү;

б) $[-5; -1]$ аралыкта кемүүчү жана $[-1; 6]$ аралыкта өсүүчү болсун.



11-сүрөт.

14. Нөлдөрү төмөндөгү сандар болгон кандайдыр функциянын графигин чийгиле:

а) -4 жана 3; б) -2 жана 5; в) -3, 0; 2 жана 7.

15. $y=6x-7$, $y=-5x+10$, $y=-9x-12$, $y=x+2$, $y=2-x$ сызыктуу функцияларынын кайсынысы: а) өсүүчү; б) кемүүчү болуп эсептелет?

16. а) $y=2x-4$; б) $y=-0{,}3x+0{,}7$; в) $y=3x$ функциясынын графигин түзгүлө.

17. а) $\sqrt{x}=2$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}$; в) $\sqrt[3]{x}=3$ теңдемесинин тамырын тапкыла.

18. а) $y=x+\frac{1}{x}$ функциясы $x\geq1$ аралыгында өсүүчү; б) $y=\frac{1}{x^2+1}$ функциясы $x\geq0$ аралыгында кемүүчү, ал эми $x\leq0$ аралыгында өсүүчү; в) $y=x^3-3x$ функциясы $x\leq-1$ жана $x\geq1$ аралыктарында өсүүчү, ал эми $-1\leq x\leq1$ аралыгында кемүүчү; г) $y=x-2\sqrt{x}$ функциясы $x\geq1$ аралыгында өсүүчү, ал эми $0\leq x\leq1$ аралыгында кемүүчү экендигин далилдегиле.

19. а) $y=\begin{cases}\text{эгерде } x\leq1 \text{ болсо, } 3x+1,\\ \text{эгерде } x>1 \text{ болсо, } x^2;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}\text{эгерде } x\leq0 \text{ болсо, } x^2,\\ \text{эгерде } x>0 \text{ болсо, } 3-x^2\end{cases}$

функциясынын графигин түзгүлө. Өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.

3. Жуп жана так функциялар

$y=|x|$ функциясынын графиги ордината огуна карата симметриялуу экендигин (5-сүрөт) биз билебиз. Мындай функциялар жуп функциялар деп аталат.

1-аныктама. **$y(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган ар кандай x саны үчүн, $(-x)$ саны ал функциянын аныкталуу областында жатса жана $y(-x)=y(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $y(x)$ функциясы *жуп функция* деп аталат.**

Мисалы, $y=x^4$ жана $y=\frac{1}{x^2}$ функциялары жуп функциялар, себеби ар кандай x саны үчүн $(-x)^4=x^4$, ал эми ар кандай $x\neq0$ саны үчүн $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$.

Жуп функциянын графиги ордината огуна карата симметриялуу болот.

2-аныктама. **$y(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган ар кандай x саны үчүн, $(-x)$ саны ал функциянын аныкталуу областында жатса жана $y(-x)=-y(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $y(x)$ функциясы *так функция* деп аталат.**

Мисалы, $y=x^5$ жана $y=\frac{1}{x^3}$ функциялары так функциялар, себеби ар кандай x саны үчүн $(-x)^5=-x^5$, ал эми ар кандай $x\neq0$ саны үчүн $\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}$.

Так функциянын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу болот.

Жуп жана так функциялардын аныкталуу областы ар дайым координат башталышына карата симметриялуу.

Жуп да эмес жана так да эмес функциялар да болот. Мисалы, $y=3x+2$ функциясы жуп эмес жана так эмес функция. Эгерде бул функция жуп функция болсо, анда ар кандай x саны үчүн $3(-x)+2=3x+2$ барабардыгы аткарылышы керек эле. Бирок, ар кандай $x\neq0$ саны үчүн бул барабардык аткарылбайт. Ал эми берилген функция так функция болсо, анда ар кандай x саны үчүн $3(-x)+2=-(3x+2)$ барабардыгы аткарылышы керек болчу. Бирок, ар кандай x саны үчүн бул барабардык да эч качан аткарылбайт.

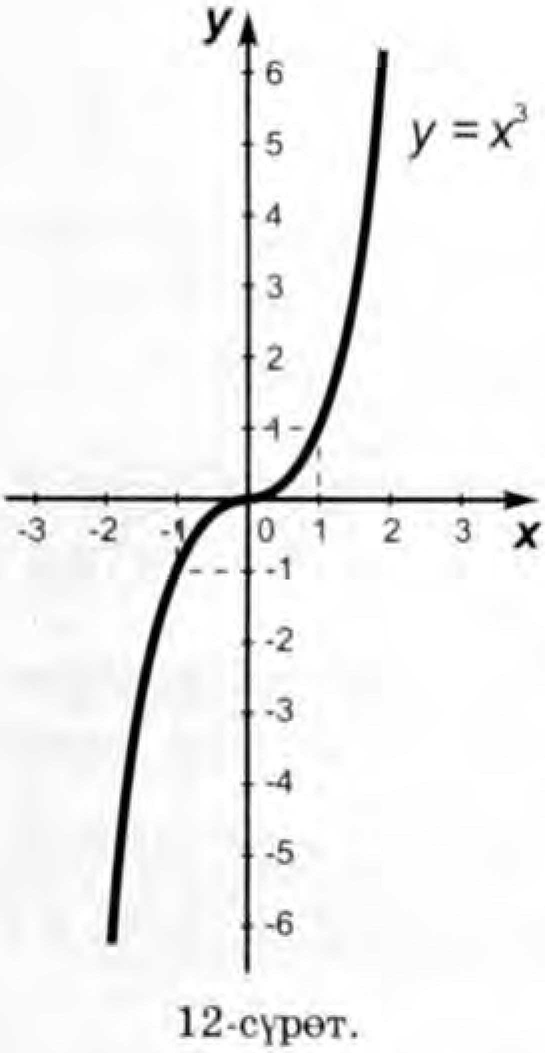
Мисал. $y=x^3$ функциясынын графигин түзгүлө.

1) $y=x^3$ функциясынын аныкталуу областы болуп, бардык анык сандардын көптүгү эсептелет.

2) Берилген функция так функция, себеби ар кандай x саны үчүн $(-x)^3=-x^3$.

3) Ар кандай $x>0$ саны үчүн $y=x^3$ функциясынын мааниси он, $y(0)=0$ жана ал функция өсүүчү функция.

4) Берилген функциянын графигинде жаткан (0; 0), (1; 1); (2; 8) точкаларын таап, $y=x^3$ функциясынын $x\geq0$ болгондогу графигин түзөбүз. Андан кийин, симметриянын жардамы менен функциянын $x<0$ болгондогу графигин түзөбүз (12-сүрөт).



12-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

20. Төмөнкү функциянын жуп же так экендигин аныктагыла:
а) $y=3x^4$; в) $y=5x^2-3$; д) $y=x^{-4}$; ж) $y=2x^4-x^2$;
б) $y=4x^5$; г) $y=3x^3+2$; е) $y=x^{-3}$; з) $y= 4x^3-5x^5$.

21. Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y=-x^4$; б) $y=2x^5$; в) $y=x^2+4$; г) $y=\sqrt[3]{x}$.

22. Төмөнкү функциялардын жуп да эмес жана так да эмес экендигин көрсөткүлө:

а) $y=\frac{x-2}{x+4}$; б) $y=\frac{x^2+x+2}{x+3}$; в) $y=5x+4$.

23. Төмөнкү функциялардын жуп же так экендигин аныктагыла:

а) $y=x^4-3x^2+4$; б) $y=4x^5-x+2$; в) $y=x^2+|x|$; г) $y=|x|+2x^3$.

24.

а) $y=\begin{cases}\text{эгер } x\geq 0 \text{ болсо, } 3x^2, \\ \text{эгер } x<0 \text{ болсо, } 4x^3;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\text{эгер } x>0 \text{ болсо, } 2x^3, \\ \text{эгер } x\leq 0 \text{ болсо, } -x^2\end{cases}$

функцияларынын графиктерин түзгүлө. Аргументтин кандай маанилеринде функция оң мааниге ээ болорун аныктагыла. Функциянын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын тапкыла.

§ 2. КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ ЖАНА КВАДРАТТЫК ҮЧ МҮЧӨ

1. Квадраттык функциянын жана квадраттык үч мүчөнүн аныктамалары

$4x^2+x+5$ туюнтмасы бир өзгөрмөлүү экинчи даражадагы көп мүчө болуп эсептелет. Мындай көп мүчөлөрдү квадраттык үч мүчөлөр деп аташат. Ал эми $y=4x^2+x+5$ функциясы *квадраттык функция* деп аталат.

1-аныктама. **$y=ax^2+bx+c$ түрүндөгү функция квадраттык функция деп аталат**, мында x — өзгөрмө, a, b жана c берилген анык сандар, $a\neq 0$.

2-аныктама. **ax^2+bx+c түрүндөгү көп мүчө квадраттык үч мүчө деп аталат**, мында x өзгөрмө, a, b жана c берилген анык сандар.

Мисалы $y=x^2$ жана $y=5x^2-1{,}2x+4$ функциялары квадраттык функциялар болуп эсептелет. Биринчи мисалда $a=1$, $b=c=0$, ал эми экинчи мисалда $a=5$, $b=-1{,}2$ жана $c=4$.

1-мисал. $y=3x^2-4x+5$ квадраттык функциясынын $x=2$, $x=-2$ жана $x=0$ болгондогу маанилерин тапкыла.

$$y(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2+5=9;$$
$$y(-2)=3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+5=25;$$
$$y(0)=3\cdot 0^2-4\cdot 0+5=5.$$

3-аныктама. **ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөнүн тамыры деп, ал үч мүчөнүн мааниси нөлгө барабар болгондогу x өзгөрмөсүнүн мааниси аталат.**

4-аныктама. **$y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциясынын нөлү деп, ал функциянын мааниси нөлгө барабар болгондогу x өзгөрмөсүнүн мааниси аталат.**

$y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциясынын нөлүн же ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсүнүн тамырын табуу үчүн $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдемесин чыгаруу керек.

2-мисал. $5x^2-3x-2$ квадраттык үч мүчөнүн тамырларын тапкыла.

Ал үчүн $5x^2-3x-2=0$ теңдемесин чыгарабыз. Төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$D=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-2) = 49;$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\mp\sqrt{49}}{10},\ x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=1.$$

Демек $5x^2-3x-2$ квадраттык үч мүчөсү эки тамырга ээ:

$$x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=1.$$

Ал эми $y=5x^2-3x-2$ квадраттык функциясы эки нөлгө ээ:

$$x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=1.$$

3-мисал. $y=x^2+4x-5$ квадраттык функциясынын мааниси: 1) 7; 2) -9; 3) -10; 4) 0 болгондой x өзгөрмөсүнүн анык маанисин тапкыла.

1) Шарт боюнча $x^2+4x-5=7$. Мындан $x^2+4x-12=0$,

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-4\mp\sqrt{16+48})=\frac{1}{2}(-4\mp\sqrt{64}),\ x_1=-6,\quad x_2=2.$$

Демек, $y(2)=y(-6)=7$.

2) Шарт боюнча $x^2+4x-5=-9$. Мындан

$$x^2+4x+4=0,\ (x+2)^2=0,\ x=-2.$$

3) Шарт боюнча $x^2+4x-5=-10$. Мындан $x^2+4x+5=0$, $D=4^2-4\cdot5=-4<0$. Дискриминант D терс, демек $x^2+4x+5=0$ теңдемеси анык сандарда тамырга ээ эмес. Ошондуктан, $y=x^2+4x-5$ функциясынын мааниси (-10) болгондой x анык саны жок.

4) Шарт боюнча $x^2+4x-5=0$. Мындан

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-4\mp\sqrt{16+20})=\frac{1}{2}(-4\mp6),$$

$$x_1=-5,\quad x_2=1.$$

Акыркы учурда $x=-5$ жана $x=1$ сандары $y=x^2+4x-5$ функциясынын нөлдөрү, ал эми x^2+4x-5 квадраттык үч мүчөнүн тамырлары болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

25. (*Оозеки*). Төмөнкү көрсөтүлгөн көп мүчөлөрдүн кайсынысы квадраттык үч мүчө болуп эсептелет:

а) $3x^2-x+4$;
б) $4x^3-x+6$;
в) $6x^2$;
г) $7x+2$;
д) x^3+7x-2;
е) $-3x^2+8$?

26. $y=x^2-x-3$ квадраттык функциясынын мааниси:

а) -1;
б) -3;
в) $-\frac{13}{4}$;
г) -5

болгондой x өзгөрмөсүнүн анык сандардагы маанисин тапкыла.

27. Квадраттык үч мүчөнүн тамырларын тапкыла:

а) x^2+x-6;
б) $0{,}2x^2+3x-20$;
в) $10x^2+5x-5$;
г) $0{,}1x^2+0{,}4$;
д) $9x^2-9x+2$;
е) $-2x^2-x-0{,}125$;
ж) x^2-2x-4;
з) $-0{,}3x^2+1{,}5x$;
и) x^2-2x+4.

28. 1; -2: 1; $\sqrt{3}$ сандарынын кайсылары төмөндө көрсөтүлгөн квадраттык үч мүчөнүн тамырлары болорун аныктагыла:

а) x^2+2x;
б) x^2+x;
в) x^2-3;
г) $5x^2-4x+1$.

29. Квадраттык функциянын нөлдөрүн тапкыла:

а) $y=x^2-x$;
б) $y=-4x^2-4x+3$;
в) $y=x^2+3$;
г) $y=5x^2-4x-1$;
д) $y=x^2+5x+20$;
е) $y=9x^2-12x-4$;
ж) $y=8x^2+8x+2$;
з) $y=3x^2+5x-2$;
и) $y=x^2-3x+1$.

30. $y=x^2+3x-3$ жана $y=3x+1$ функцияларынын маанилери барабар болгондой x өзгөрмөсүнүн маанилерин тапкыла.

31. Эгерде x^2+px+q квадраттык үч мүчөнүн тамырлары x_1 жана x_2 белгилүү болсо, анда p жана q сандарын тапкыла:

а) $x_1=2,\ x_2=3$;
б) $x_1=-4,\ x_2=1$;
в) $x_1=-1,\ x_2=-2$;
г) $x_1=5,\ x_2=-3$.

2. Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу

$ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдемеси кандай тамырларга ээ болсо, ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсү дагы ошондой тамырларга ээ болгондуктан, ал квадраттык теңдемеге окшоп эки тамырга, бир тамырга ээ болот же тамырларга ээ болбойт. Ал квадраттык теңдеменин $D=b^2-4ac$ дискриминантынын белгисинен көз каранды болот, аны дагы *квадраттык үч мүчөнүн дискриминанты* деп аташат. Эгерде $D>0$ болсо, анда квадраттык үч мүчө эки тамырга ээ болот; эгерде $D=0$ болсо, анда квадраттык үч мүчө бир тамырга ээ болот; эгерде $D<0$ болсо, анда квадраттык үч мүчө тамырга ээ болбойт.

Кээде, маселелер чыгарганда ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсүн $a(x-m)^2+n$ (мында m менен n белгилүү сандар) түрүндө көрсөтүү ыңгайлуу болот. Бул өзгөртүү кандай аткарыла тургандыгын мисалда көрсөтөбүз.

1 - мисал. $4x^2-24x+27$ үч мүчөсүнөн эки мүчөнүн квадратын бөлүп алгыла.

x^2 тын көбөйтүүчүсүн кашаанын сыртына чыгарабыз:

$$4x^2-24x+27=4(x^2-6x+\frac{27}{4})=4(x^2-2\cdot3x+3^2-3^2+\frac{27}{4})=4(x-3)^2-9.$$

Эми $4x^2-24x+27$ квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыратуу талап кылынсын дейли. Адегенде квадраттык үч мүчөнү төмөнкүдөй өзгөртүп жазып алабыз:

$$4x^2-24x+27=4\left[(x-3)^2-(\tfrac{3}{2})^2\right].$$

Эми бул теңдештиктин оң жагына $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ формуласын ($a=x-3$, $b=\frac{3}{2}$) колдонобуз. Анда

$$4\left[(x-3)^2-(\tfrac{3}{2})^2\right]=4(x-\tfrac{3}{2})(x-\tfrac{9}{2}).$$

Демек, $4x^2-24+27=4(x-\frac{3}{2})(x-\frac{9}{2})$.

$x=\frac{3}{2}$ жана $x=\frac{9}{2}$ болгондо $4(x-\frac{3}{2})(x-\frac{9}{2})$ көбөйтүндүсү нөлгө айланат, ошондуктан $4x^2-24x+27$ квадраттын үч мүчөсү да нөлгө айланат. Демек, $\frac{3}{2}$ менен $\frac{9}{2}$ сандары анын тамырлары болуп эсептелет.

Биз $4x^2-24x+27$ квадраттык үч мүчөсүн 4 санынын, б. а. x^2 тын коэффициентинин жана эки сызыктуу көбөйтүүчүлөрдүн көбөйтүндүсү түрүндө көрсөттүк. Алардын биринчиси x өзгөрмөсү менен үч мүчөнүн бир тамырынын арасындагы айырманы, ал эми экинчиси x өзгөрмөсү менен экинчи тамырынын арасындагы айырманы көрсөтөт.

Мындай ажыратууну тамырларга ээ болуучу каалагандай квадраттык үч мүчө үчүн алууга болот. Эгерде квадраттык үч мүчөнүн дискриминанты нөлгө барабар болсо, анда ал үч мүчө эки барабар тамырга ээ болот деп айтышат.

1 - теорема. **Эгерде ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсүнүн тамырлары x_1 жана x_2 болсо, анда $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ болот.**

Далилдөө. ax^2+bx+c көп мүчөсүнөн a көбөйтүүчүсүн кашаанын сыртына чыгарабыз. Анда $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a})$. ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсүнүн тамырлары $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдемесинин дагы тамырлары болуп эсептелгендиктен, Виеттин теоремасы боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Мындан $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$ келип чыгат. Ошондуктан, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x^2-x_1x)-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-$ $-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2)$.

Ошентип, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2-теорема. **Эгерде ax^2+bx+c квадраттык үч мүчө тамырларга ээ болбосо, б.а. $D=b^2-4ac<0$ болсо, анда аны биринчи даражадагы көп мүчө болуп эсептелүүчү көбөйтүүчүлөргө ажыратууга болбойт.**

Далилдөө. ax^2+bx+c үч мүчөсү тамырларга ээ болбосун дейли. Бирок, аны биринчи даражадагы көп мүчөлөрдүн көбөйтүндүсү түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн деп эсептейли: $ax^2+bx+c=(kx+m)\times$ $\times(px+q)$, мында k, m, p жана q белгилүү сандар, $k\neq0$ жана $p\neq0$, жана $x=-\frac{m}{k}$ жана $x=-\frac{q}{p}$ болгондо $(kx+m)(px+q)$ көбөйтүндүсү нөлгө айланат. Ошондуктан, x тин бул маанилеринде ax^2+bx+c үч мүчөсү да нөлгө айланат, б.а. $-\frac{m}{k}$ жана $-\frac{q}{p}$ сандары анын тамырлары болуп эсептелет. Биз мында карама-каршылыкка келдик, себеби шарт боюнча бул үч мүчө тамырларга ээ болбойт.

2-мисал. $3x^2+4x-2$ квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$3x^2+4x-2=0$ теңдемесин чыгарып, үч мүчөнүн тамырларын табабыз:

$$x_1=-\frac{2+\sqrt{10}}{3}, \qquad x_2=-\frac{2-\sqrt{10}}{3}.$$

Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу жөнүндөгү 1-теорема боюнча төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$3x^2+4x-2=0=3(x+\frac{2+\sqrt{10}}{3})(x+\frac{2-\sqrt{10}}{3}).$$

3-мисал. $-5x^2+20x-20$ квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$-5x^2+20x-20=0$ теңдемесин чыгарып, үч мүчөнүн тамырларын табабыз: $x_1=x_2=2$.

Демек, 1-теорема боюнча:

$$-5x^2+20x-20=-5(x-2)(x-2)=-5(x-2)^2.$$

4-мисал. $2x^2-3x+2$ квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$2x^2-3x+2=0$ теңдемесин чыгарабыз. Ал теңдеме тамырларга ээ эмес, себеби анын дискриминанты $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2=-7<0$. Демек, 2-теорема боюнча $2x^2-3x+2$ үч мүчөсү көбөйтүүчүлөргө ажырабайт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

32. Квадраттык үч мүчөдөн эки мүчөнүн квадратын бөлүп алгыла:

а) x^2-4x+2;
б) $2x^2-4x+10$;
в) $4x^2-8x+5$;
г) $x^2+5x+10$;
д) $5x^2+10x-3$;
е) $\frac{1}{2}x^2+x-6$;
ж) $3x^2+6x-3$;
з) $\frac{1}{4}x^2-x+2$;
и) x^2-x+1.

33. x тин кандай маанисинде $2x^2-4x+6$ үч мүчөсү эң кичине маанини кабыл алат? Ал маанини тапкыла.

34. Периметри 20 см болгон бардык тик бурчтуктардын ичинен квадрат эң чоң аянтка ээ болорун далилдегиле.

35. Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $2x^2-5x-7$;
б) $-5y^2-2y+3$;
в) x^2+8x-9;
г) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$;
д) $-5x^2-10x+15$;
е) $y^2-16y+15$;
ж) $-x^2+12x-24$;
з) $-2x^2+5x-3$;
и) $2x^2-2x+\frac{1}{2}$;
к) $-16a^2-24a-9$;
л) m^2-5m+6;
м) $0{,}25m^2-2m+4$.

36. Теңдештикти далилдегиле:
а) $10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$;
б) $0{,}5(x-6)(x-5)=0{,}5x^2-5{,}5x+15$.

37. Квадраттык үч мүчөнү биринчи даражадагы көп мүчөлөрдүн көбөйтүндүсү түрүндө көрсөтүүгө мүмкүнбү:
а) $3x^2-3x-11$;
б) $-x^2+7x-11$;
в) $4a^2-9a+7$;
г) $-3y^2+12y-12$?

38. Катеттеринин суммасы 6 см ге барабар болгон бардык тик бурчтуу үч бурчтуктардын ичинен тең капталдуу үч бурчтук эң чоң аянтка ээ болорун далилдегиле.

39. Бөлчөктү кыскарткыла:

а) $\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}$;
б) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$;
в) $\frac{16-b^2}{-b^2+b+12}$;
г) $\frac{-p^2+11p-10}{p^2-8p-20}$;
д) $\frac{x^2-11x+24}{x^2-64}$;
е) $\frac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

40. Бөлчөктүн маанисин тапкыла:

а) $x=-9$; -99; -999 болгондо $\frac{36-x^2}{x^2-7x+6}$ нын;

б) $x=-1$; 5; 10 болгондо $\frac{4x^2+8x-32}{16-4x^2}$ тын.

§ 3. КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯНЫН ГРАФИГИ

1. $y = ax^2$ функциясы

1 - мисал. $y = x^2$ функциясынын графигин түзгүлө (мында $a = 1$).

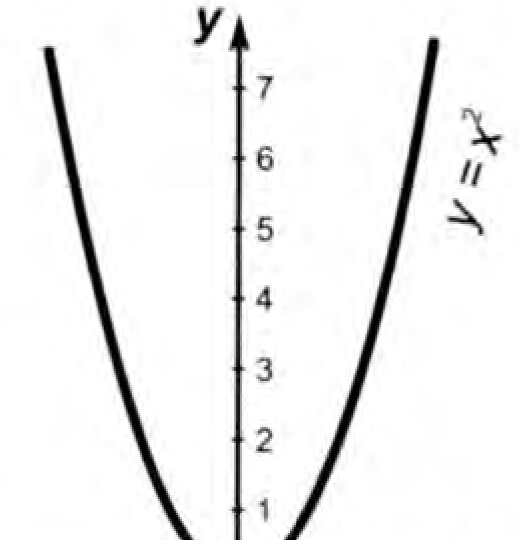
Функциянын графигин түзүү үчүн анын айрым маанилеринин таблицасын түзөбүз:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y=x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

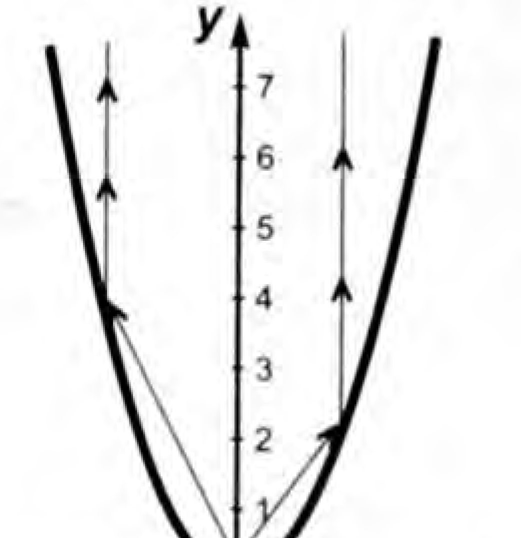
Координаталары таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди белгилейбиз. Аларды жылма сызык менен туташтырып, $y = x^2$ функциясынын графигин алабыз (13-сүрөттү кара). $y = x^2$ функциясынын графиги ордината огуна карата симметриялуу.

$y = x^2$ функциясынын графиги *парабола* деп аталарын билесинер. Парабола кызыктуу касиеттерге ээ. Ал касиеттери техникада кеңири колдонулат. Мисалы, параболанын симметрия огунда параболанын *фокусу* деп аталган чекит бар. Эгерде бул чекитке жарыктын булагын жайгаштырсак, анда параболадан чагылган нурлар симметрия огуна жарыш болот (14-сүрөттү кара). Фокустун бул касиети локаторлорду, прожекторлорду жана башка приборлорду даярдоодо колдонулат.

$y = x^2$ параболанын фокусу $(0; \frac{1}{4})$ чекити болот.



13-сүрөт.

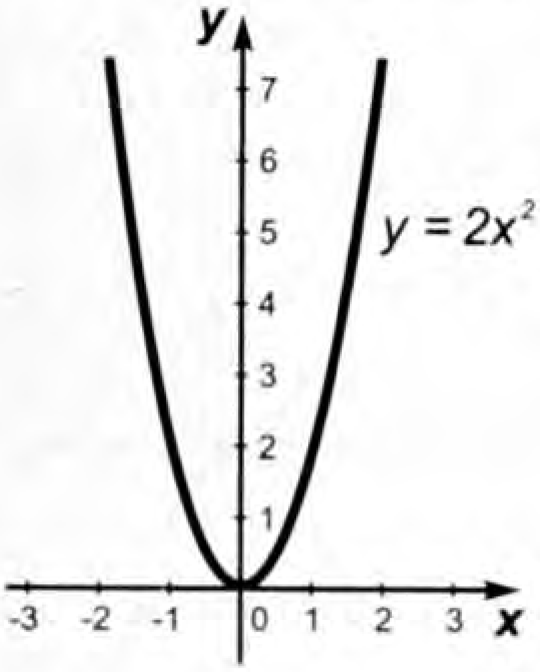


14-сүрөт.

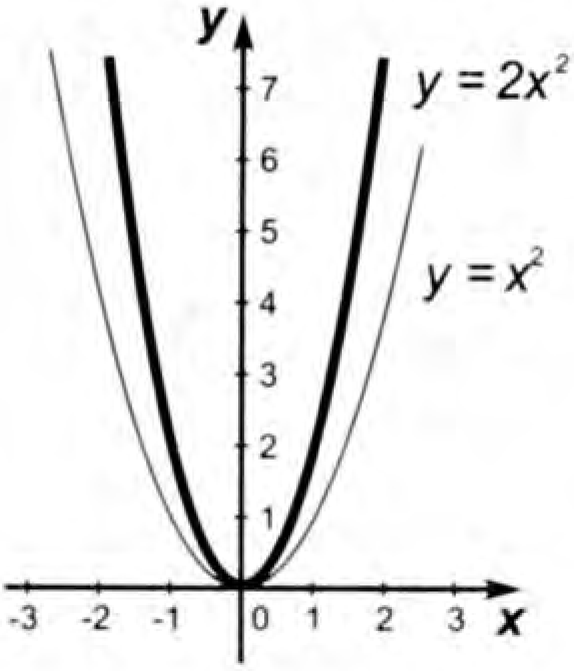
2 - мисал. $y = 2x^2$ функциясынын графигин түзгүлө (мында $a = 2$). Ал үчүн анын маанилеринин таблицасын түзөбүз:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y=2x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Координаталары таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди түзөбүз. Аларды жылма сызык менен туташтырсак, $y=2x^2$ функциясынын графигин алабыз (15-сүрөттү кара). Каалагандай $x\neq 0$ үчүн $y=2x^2$ функциясынын мааниси $y=x^2$ функциясынын туура келүүчү маанисинен эки эсе чоң болот. Башкача айтканда, $y=2x^2$ функциясынын графиги $y=x^2$ функциясынын графигин Ox огунан Oy огун бойлото эки эсе чоюу аркылуу алынат (16-сүрөттү кара).



15-сүрөт.

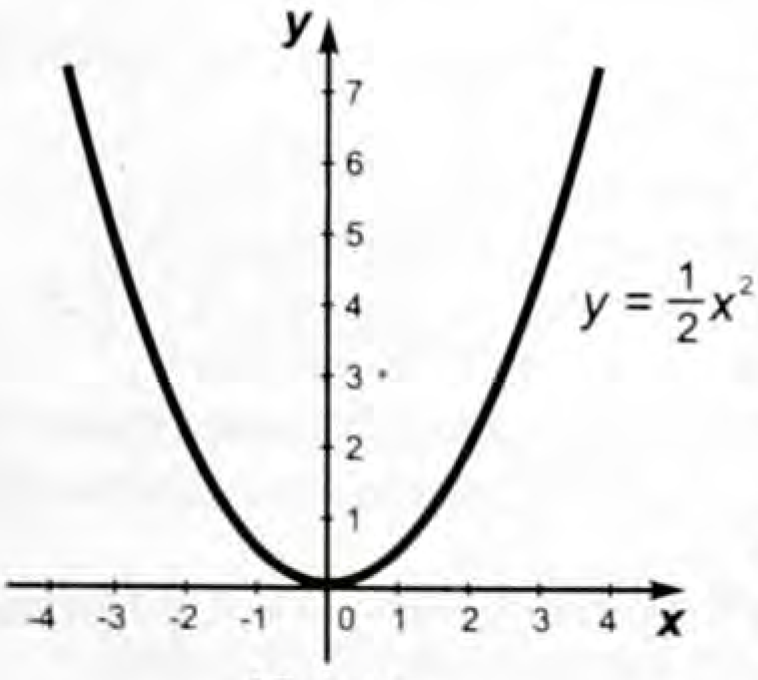


16-сүрөт.

3-мисал. $y=(\frac{1}{2})x^2$ функциясынын графигин түзгүлө.

Ал үчүн анын маанилеринин таблицасын түзөбүз:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8



17-сүрөт.

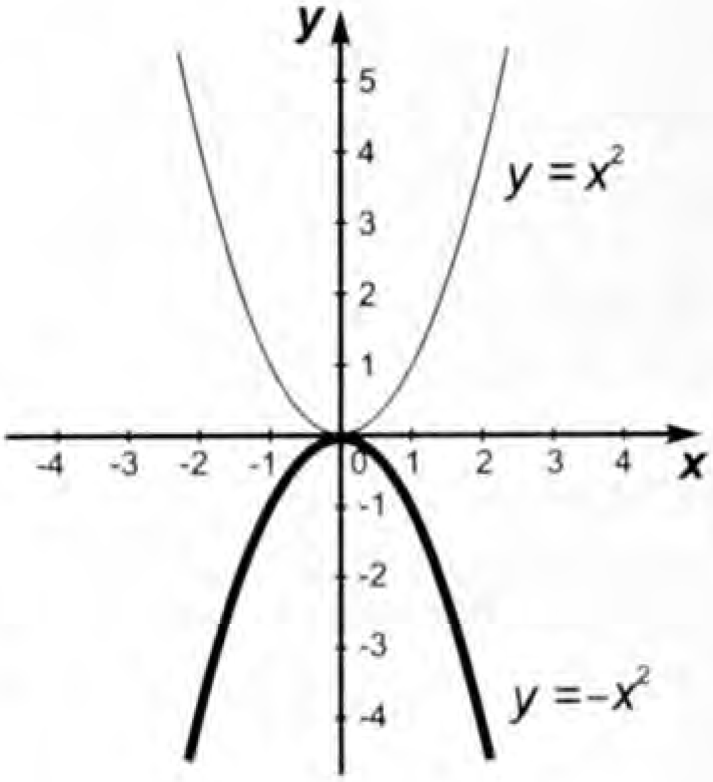
Координаталары таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди түзүп, андан кийин аларды жылма сызык менен туташтырып, $y=(\frac{1}{2})x^2$ функциясынын графигин алабыз (17-сүрөттү кара).

Каалагандай $x\neq 0$ үчүн $y=(\frac{1}{2})x^2$ функциясынын мааниси $y=x^2$ функциясынын туура келүүчү маанисинен эки эсе кичине болот.

Ошентип, $y=(\frac{1}{2})x^2$ функциясынын графиги $y=x^2$ функциясынын графигинен Ox огунан Oy огун бойлото эки эсе кысуу аркылуу алынат. Жалпысынан алганда, эгерде $a>1$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясынын графиги $y=x^2$ функциясынын графигин Ox огунан Oy огу боюнча a эсе чоюу аркылуу алынат. Ал эми $0<a<1$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясынын графиги $y=x^2$ функциясынын графигин Ox огунан Oy огу боюнча $\frac{1}{a}$ эсе кысуу аркылуу алынат.

Эми $a<0$ болгондогу $y=ax^2$ функциясын карап көрөбүз.

4-мисал. $y=-x^2$ функциясынын графигин түзгүлө.



18-сүрөт.

$y=-x^2$ жана $y=x^2$ функцияларын салыштырабыз. Аргумент x тин бир маанисинде, ал функциялардын маанилеринин модулдары барабар, ал эми белгилери карама-каршы. Демек, $y=-x^2$ функциясынын графигин $y=x^2$ функциясынын графигинен Ox огуна карата симметриянын жардамы менен алынышы мүмкүн (18-сүрөт).

Жалпысынан, $y=ax^2$ жана $y=-ax^2$ функцияларынын графиктери ($a\neq0$ болгондо) Ox огуна карата симметриялуу болушат. Ар кандай $a\neq0$ саны үчүн, $y=ax^2$ функциясынын графиги парабола деп аталат. Эгерде $a>0$ болсо, парабола жогору карай багытталган, ал эми $a<0$ болсо, анда парабола төмөн карай багытталат. $y=ax^2$ параболасынын фокусу $(0;\ \frac{1}{4}a)$ чекитинде жайланышкан.

Ар кандай $a\neq0$ саны үчүн, $y=ax^2$ функциясынын негизги касиеттерин баяндайбыз.

1. Эгерде $x=0$ болсо, анда $y=0$ болот. Функциянын графиги координаталар башталышы аркылуу өтөт.

2. Эгерде $a>0$ жана $x\neq0$ болсо, анда $y=ax^2>0$ болот. Функциянын графиги жогорку жарым тегиздикте жайланышкан.

Ал эми $a<0$ жана $x\neq0$ болсо, анда $y=ax^2<0$ болот. Функциянын графиги төмөнкү жарым тегиздикте жайланышкан.

3. $y=ax^2$ функциянын графиги, Oy огуна карата симметриялуу.

4. Эгерде $a>0$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясы $(-\infty,\ 0]$ аралыгында кемийт жана $[0,\ +\infty)$ аралыгында өсөт.

Ал эми $a<0$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясы $(-\infty,\ 0]$ аралыгында өсөт жана $[0,\ +\infty)$ аралыгында кемийт.

5. Эгерде $a>0$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясынын маанилеринин областы болуп $[0, +\infty)$ аралыгы эсептелет.

Ал эми $a<0$ болсо, анда $y=ax^2$ функциясынын маанилеринин областы болуп $(-\infty, 0]$ аралыгы эсептелет.

4-касиетти $a>0$ болгондогу учуру үчүн далилдейбиз. Каалагандай x_1 жана x_2 сандарын алалы, мында $x_2>x_1$, ал эми y_1 менен y_2 функциянын аларга туура келүүчү маанилери болсун дейли. Анда

$$y_2-y_1=ax_2^2-ax_1^2=a(x_2-x_1)(x_2+x_1)\,.$$

$a>0$ жана $x_2>x_1$ болгондуктан, x_2+x_1 көбөйтүүчүсү кандай белгиге ээ болсо, $a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$ көбөйтүндүсү да ошондой белгиге ээ болот. Эгерде x_1 менен x_2 сандары $(-\infty, 0]$ аралыгында жатса, анда x_2+x_1 көбөйтүүчү терс болот. Эгерде x_1 менен x_2 сандары $[0, +\infty)$ аралыгында жатса, анда x_2+x_1 көбөйтүүчү оң болот. Биринчи учурда $y_2-y_1<0$, б.а. $y_2<y_1$ экинчи учурда $y_2-y_1>0$, б.а. $y_2>y_1$. Демек, функция $(-\infty, 0]$ аралыгында кемийт, ал эми $[0, +\infty)$ аралыгында өсөт.

4-касиеттин $a<0$ учурундагы далилдениши $a>0$ болгондо $y=ax^2$ функциясы үчүн кандай жүргүзүлсө, ошого окшош эле жүргүзүлөт.

Парабола менен анын симметрия огунун кесилишкен чекитин параболанын *чокусу* деп аташат. $y=ax^2$ параболасынын чокусу болуп координаталар башталышы эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

41. $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын графигин түзгүлө. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) $x=0{,}4;\ -1{,}3;\ 2{,}5$ болгондогу y тин маанисин;

б) $y=3;\ 4;\ 5$ боло тургандай x тин маанисин:

в) функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын.

42. $y=-3x^2$ функциясынын графигин түзгүлө жана төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) $x=-2{,}5;\ 0{,}8;\ 3{,}5$ болгондогу y тин маанисин;

б) $y=-3;\ -2;\ 4{,}5$ боло турган x тин маанисин;

в) функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын.

43. $y=ax^2$ параболасы $M(-2; 3)$ чекити аркылуу өтөт, a — параметрин тапкыла.

44. а) $M(1{,}5; -225)$; б) $K(-3; -900)$; в) $P(2; 400)$ чекити $y=-100x^2$ функциясынын графигинде жатабы?

45. $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$ жана $y=1{,}8x^2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасында түзгүлө. $x=-0{,}5$, $x=1$ жана $x=-2$ болгондогу ал функциялардын маанилерин салыштыргыла.

46. $y=3x^2$ параболасы менен:

а) $y=40$; б) $y=60$; в) $y=-1$; г) $y=4x-10$

түз сызыгы кесилишеби? Эгерде кесилишүү чекиттери бар болсо, анда алардын координаталарын тапкыла.

47. Тегеректин аянты (сантиметр квадрат менен) $S=\pi r^2$ формуласы боюнча эсептелет, мында r — тегеректин радиусу (сантиметр менен). $S=\pi r^2$ функциясынын графигин түзгүлө, жана график боюнча: а) Эгерде тегеректин радиусу 1,3; 0,8; 2,1; см ге барабар болсо, тегеректин аянтын; б) аянты 1,8; 2,5; 6,5 см^2 ка барабар болгон тегеректин радиусун тапкыла.

2. Квадраттык функция

$y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ квадраттык функциясын карайбыз. ax^2+bx+c үч мүчөсүнөн эки мүчөнүн квадратын бөлүп алабыз:

$$ax^2+bx+c=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]=a[x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]=$$

$$=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Демек,

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

болот.

Мындан, биз $m=-\frac{b}{2a}$ жана $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ белгилөөсүн киргизип, $y=ax^2+bx+c$ функциясын $y=a(x-m)^2+n$ түрүндө жазып алабыз.

Бирок, $y=a(x-m)^2$ функциясынын графигин $y=ax^2$ функциясынын графигинен, $m>0$ үчүн m бирдикке оңду карай, ал эми $m<0$ үчүн $(-m)$ бирдикке солду карай Ox огун бойлото жылдыруунун жардамы менен алууга мүмкүн.

Ал эми $y=ax^2+n$ функциясынын графигин $y=ax^2$ функциясынын графигинен, $n>0$ үчүн n бирдикке жогору карай, ал эми $n<0$ учуру үчүн $(-n)$ бирдикке төмөн карай Oy огун бойлото жылдыруунун жардамы менен алынат.

Демек, $y=ax^2+bx+c$ функциясынын графигин $y=ax^2$ функциясынын графигинен эки жолу жылдыруунун жардамы менен алууга болот. Мында, биринчи жолу $y=ax^2$ функциясынын графигин Ox огуна бойлото жылдырабыз, ал эми экинчи жолу которулган параболаны Oy огун бойлото жылдырабыз. Ошентип, $y=ax^2+bx+c$ функциясынын графиги чокусу (m, n) чекити болуп (мында $m=-\frac{b}{2a}$, $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$) эсептелген парабола болот деген жыйынтык келип чыгат. Параболанын симметрия огу болуп, Oy огуна параллель болгон $x=m$ түз сызыгы эсептелет. $a>0$ болгондо параболанын тармактары жогору, ал эми $a<0$ болгондо төмөн багытталган болот.

Квадраттык функциянын графигин түзүү үчүн төмөндөгүлөрдү аткаруу керек:

1) параболанын чокусунун координаталарын таап, аны координаттык тегиздикте белгилөө;

2) параболада жатуучу бир нече чекиттерди табуу;

3) белгиленген чекиттерди жылма сызык менен туташтыруу.

Параболанын чокусунун m абциссасын $m=-\frac{b}{2a}$ формуласы боюнча табуу оңтойлуу. Абциссанын табылган маанисин $y=ax^2+bx+c$ формуласына коюп, n ординатасын табабыз, анткени $x=m$ болгондо $y=am^2+bm+c=a(m-m)^2+n=n$ болот.

Квадраттык функциялардын графиктерин түзүүгө мисалдар келтирели.

1-мисал.

$$y=(\frac{1}{2})x^2,\ y=\frac{1}{2}(x-1)^2,\ y=\frac{1}{2}x^2+3 \text{ жана } y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$$

функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасында түзгүлө.

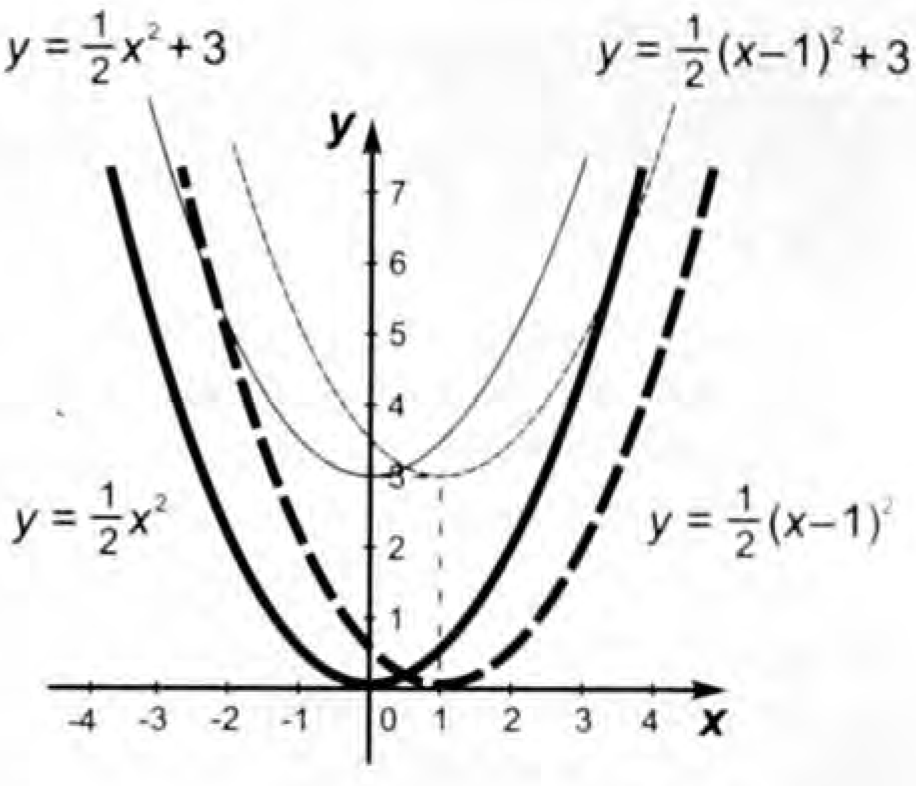
Ал үчүн берилген функциялардын маанилеринин таблицасын түзөбүз:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
$y=\frac{1}{2}x^2+3$	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5	11
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$	15,5	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5

Ар бир берилген функция үчүн таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди белгилеп, андан кийин аларды жылма сызык менен туташтырып, алардын графиктерин алабыз (19-сүрөт).

Демек, $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ функциясынын графиги $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин Ox огун бойлото оңго 1 бирдикке параллель которуунун жардамы менен алынган парабола болот.

Ал эми $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ функциясынын графиги $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ функциясынын графигин Oy огун бойлото жогору карай 3 бирдикке параллель которуунун жардамы менен алынган парабола болот. Башкача айтканда $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ функциясынын графиги $y=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин эки жолу жылдыруунун жардамы менен алууга болот.



19-сүрөт.

2-мисал. $y=2x^2-12x+17$ функциясынын графиги болуп, тармактары жогору багытталган парабола, ал эми $y=-2x^2+12x-19$ функциясынын графиги болуп, тармактары төмөн багытталган парабола эсептелет. Алардын чокусунун координаталарын табабыз:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{4}=\frac{12}{4}=3\ ,$$

$$n=2\cdot 3^2-12\cdot 3+17=(-2)\cdot 3^2+12\cdot 3-19=-1\ .$$

Демек, $(m;n)=(3;-1)$ чекити берилген $y=2x^2-12x+17=2(x-3)^2-1$ жана $y=-2(x-3)^2-1$ параболаларынын жалпы чокусу болот.

Ал функциялардын дагы бир нече маанилеринин таблицасын түзөбүз:

x	1	2	3	4	5
$y=2x^2-12x+17$	7	1	−1	1	7
$y=-2x^2+12x-19$	−9	−3	−1	−3	−9

Ар бир берилген функция үчүн, таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди белгилеп, андан кийин аларды жылма сызык менен туташтырып, берилген эки функциянын графиктерин алабыз (20-сүрөт).

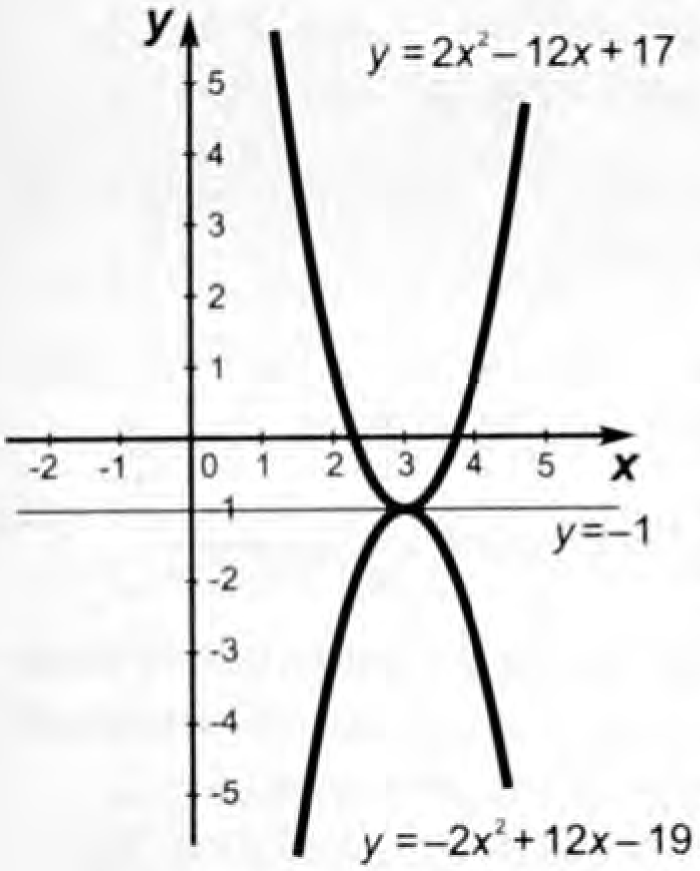
Демек, $y=2x^2-12x+17$ жана $y=-2x^2+12x-19$ функцияларынын графиктери $y=-1$ түз сызыгына карата симметриялуу болушат.

Параболалардын графиктерин өзгөртүү жөнүндөгү корутундуларды каалагандай $y=f(x)$ функциясына колдонууга болот. $y=f(x-m)$ функциясынын графигин $y=f(x)$ функциясынын графигинен, $m>0$ үчүн m бирдикке оңго карай, ал эми $m<0$ үчүн $(-m)$

бирдикке солго карай Ox огун бойлото жылдыруунун жардамы менен алууга болот.

$y=f(x)+n$ функциясынын графигин $y=f(x)$ функциясынын графигинен, $n>0$ үчүн n бирдикке жогору карай, ал эми $n<0$ үчүн $(-n)$ бирдикке төмөн карай Oy огун бойлото жылдыруунун жардамы менен алууга болот.

Мындан, $y=f(x-m)+n$ функциясынын графигин $y=f(x)$ функциясынын графигинен эки жолу тиешелүү жылдыруунун жардамы менен алууга мүмкүн.



20-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

48. $y=\frac{1}{3}x^2$ параболасынын графигинин жардамы менен төмөнкү функциянын графигин түзгүлө:

а) $y=\frac{1}{3}(x-2)^2$; г) $y=\frac{1}{3}x^2-4$; ж) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+4$;

б) $y=\frac{1}{3}x^2+4$; д) $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+4$; з) $y=-\frac{1}{3}x^2$;

в) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2$; е) $y=\frac{1}{3}(x-2)^2-4$; и) $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+4$.

49. Параболанын чокусунун координаталарын тапкыла:

а) $y=(x-3)^2-2$; г) $y=-5(x+2)^2-5$; ж) $y=2x^2-6x+11$;

б) $y=(x+3)^2+4$; д) $y=x^2+4x+1$; з) $y=-3x^2+18x-7$;

в) $y=5(x+4)^2-6$; е) $y=x^2-6x-7$; и) $y=2x^2-6x+1$.

50. Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y=\frac{1}{3}x^2-4x+4$; г) $y=-x^2+x+2$; ж) $y=2x^2-4x+5$;

б) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-1$; д) $y=4x^2+4x-3$; з) $y=4x^2+12x+9$;

в) $y=x^2-7x+10$; е) $y=-3x^2-2x+1$; и) $y=x^2-x+3$.

51. Эгерде $A(1;\,-2)$ чекити $y=kx^2+8x+m$ параболасынын чокусу болсо, анда k жана m сандарын тапкыла.

52. Эгерде $A(-2;\,-7)$ чекити $y=x^2+px+q$ параболасынын чокусу болсо, анда p жана q сандарын тапкыла.

53. Графиги $A(1;\,4)$, $B(-1;\,10)$ жана $C(2;\,7)$ чекиттери аркылуу өткөн $y=ax^2+bx+c$ функциясын тапкыла.

54. Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y=|12x^2-x-1|$; б) $y=x^2-5|x|-6$.

55. $y=x^2-6x+5$ функциясынын графигин түзгүлө жана ал функциянын эң кичине маанисин тапкыла.

§ 4. КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1. Квадраттык барабарсыздык жана график методу

Аныктама. **Эгерде барабарсыздыктын сол тарабы квадраттык үч мүчө, ал эми оң тарабы нөл болсо, анда мындай барабарсыздык *квадраттык барабарсыздык* деп аталат.**

Квадраттык барабарсыздыкты бир өзгөрмөлүү экинчи даражадагы барабарсыздык деп да аташат.

Мисалы, $3x^2-4x+1\geq 0$, $4x^2-x-3\leq 0$, $-x^2-2x-3>0$, $2x^2-x+2<0$ барабарсыздыктары квадраттык барабарсыздыктар болушат.

Бир өзгөрмөсү бар барабарсыздыкты, туура сан барабарсыздыгына келтире турган өзгөрмөнүн сан мааниси, ал барабарсыздыктын чыгарылышы деп аталарын билесиңер. Ал эми «барабарсыздыкты чыгаруу» деп ал барабарсыздыктын бардык чыгарылыштарын табуу же чыгарылышы жок экендигин далилдөө эсептелерин да эске салабыз.

Квадраттык барабарсыздыкты чыгарууну, ага туура келүүчү квадраттык функция оң же терс маанини алуучу аралыктарды табуу катарында кароого болот. Муну график жолу менен аткарса болот.

$ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c\geq 0$) жана, $ax^2+bx+c<0$ ($ax^2+bx+c\leq 0$) түрүндөгү барабарсыздыктарды график жолу менен чыгаруу үчүн төмөндөгүдөй иштейбиз.

1) Квадраттык үч мүчөнүн дискриминантын таап, анын тамырларга ээ болорун же болбосун көргөзөбүз.

2) Эгерде үч мүчө тамырларга ээ болсо, анда аларды Ox огунда белгилеп, белгиленген чекиттер аркылуу параболаны схемалык түрдө сызабыз. Анын тармактары $a>0$ үчүн жогору карай, ал эми $a<0$ үчүн төмөн карай багытталган болот.

Эгерде үч мүчө тамырларга ээ болбосо, б.а. дискриминант терс болсо, анда $a>0$ үчүн жогорку, ал эми $a<0$ үчүн төмөнкү жарым тегиздикте жайланышкан параболанын графигин схемалык түрдө сызабыз.

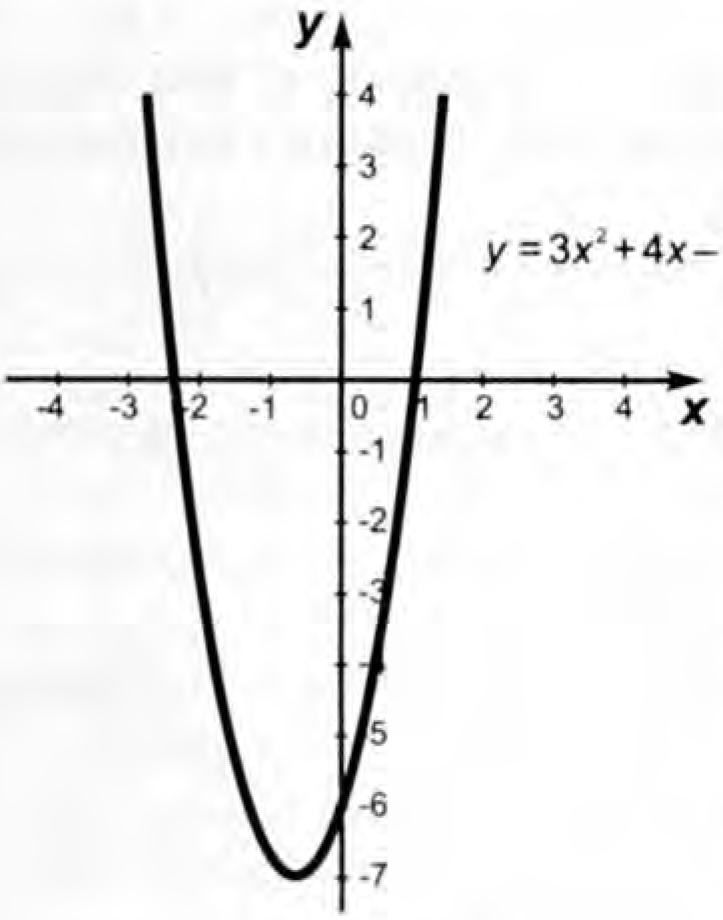
3) Эгерде $ax^2+bx+c>0$ барабарсыздыгын чыгарсак, анда Ox огунан жогору жайланышкан параболанын чекиттери үчүн Ox огундагы аралыктарды табабыз. Ал эми $ax^2+bx+c<0$ барабарсыздыгын чыгарсак, анда Ox огунан төмөн жайланышкан параболанын чекиттери үчүн Ox огундагы аралыктарды табабыз.

1 - мисал. $3x^2+4x-7<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$y=3x^2+4x-7$ функциясын карайбыз. Бул функциянын графиги болуп, тармактары жогору карай багытталган парабола болот. Бул параболанын Ox огу менен кесилишүү чекиттерин табуу үчүн $3x^2+4x-7=0$ теңдемесин чыгарабыз. Анын чыгарылыштары $x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=1$ болот.

Демек, парабола Ox огун абсциссалары $-\frac{7}{3}$ жана 1ге барабар болгон эки чекитте кесип өтөт.

Координата тегиздигинде парабола кандай жайлашкандыгын схемалык түрдө чийип көргөзөбүз (21-сүрөт). Эгерде $x\in(-\frac{7}{3};1)$ болсо, $y=3x^2+4x-7$ функциясы терс маанилерди кабыл алары көрүнүп турат. Ошондуктан, $3x^2+4x-7<0$ барабарсыздыгынын чыгарылыштарынын көптүгү болуп, $(-\frac{7}{3};1)$ сан аралыгы эсептелет.



21-сүрөт.

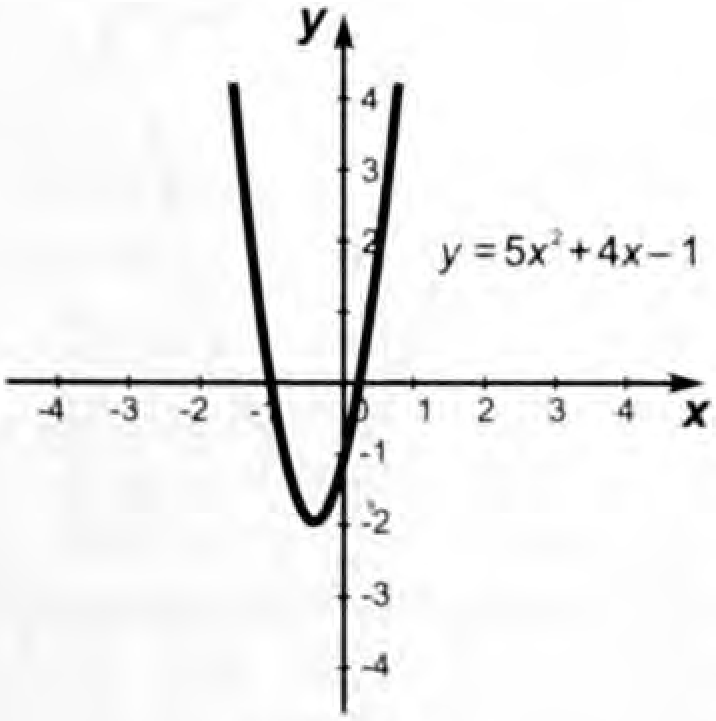
Барабарсыздыкты чыгаруунун бул график методунда бизди параболанын чокусу кызыктырбайт. Мында параболанын тармагы кайсы жакка (жогору же төмөн) багытталгандыгын жана анын Ox огу менен кесилишкен чекиттеринин абсциссалары кандай экендигин билүү гана маанилүү болот.

2 - мисал. $5x^2+4x-1\geq0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$y=5x^2+4x-1$ функциясынын графиги — тармактары жогору карай багытталган парабола.

Парабола Ox огун кандай чекиттерде кесип өтөрүн аныкташ үчүн $5x^2+4x-1=0$ теңдемесин чыгарабыз. Анда $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{5}$ экендигин алабыз.

Координата тегиздигинде парабола кандай жайланышкандыгын схемалык түрдө чийип көрсөтөбүз (22-сүрөт).



22-сүрөт.

Эгерде x тин маанилери $(-\infty;-1]$ аралыгында же $[\frac{1}{5};+\infty)$ аралыгында жатса, берилген барабарсыздык туура болору 22-сүрөттөн көрүнүп турат, б.а. барабарсыздыктын чыгарылыштарынын көптүгү болуп $(-\infty; -1]$ жана $[\frac{1}{5}; +\infty)$ аралыктарынын биригүүсү эсептелет.

Жообу: $(-\infty;-1]\cup[\frac{1}{5};+\infty)$.

3 - м и с а л. $-\frac{1}{3}x^2+2x-3<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$y=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$ функциясынын графиги — тармактары төмөн карай багытталган парабола.

Параболанын графиги Ox огуна карата кандай жайланышкандыгын билиш үчүн, $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=0$ теңдемесин чыгарабыз. Анда $x^1=x^2=3$ экендигин алабыз. Теңдеме бир гана тамырга ээ. Демек, парабола Ox огун жанып өтөт.

Параболаны схемалык түрдө сызып (23-сүрөт), x тин 3төн башка каалагандай маанилеринде квадраттык функция терс маанилерди ала тургандыгын байкайбыз.

Жообу: x саны 3кө барабар болбогон каалагандай сан.

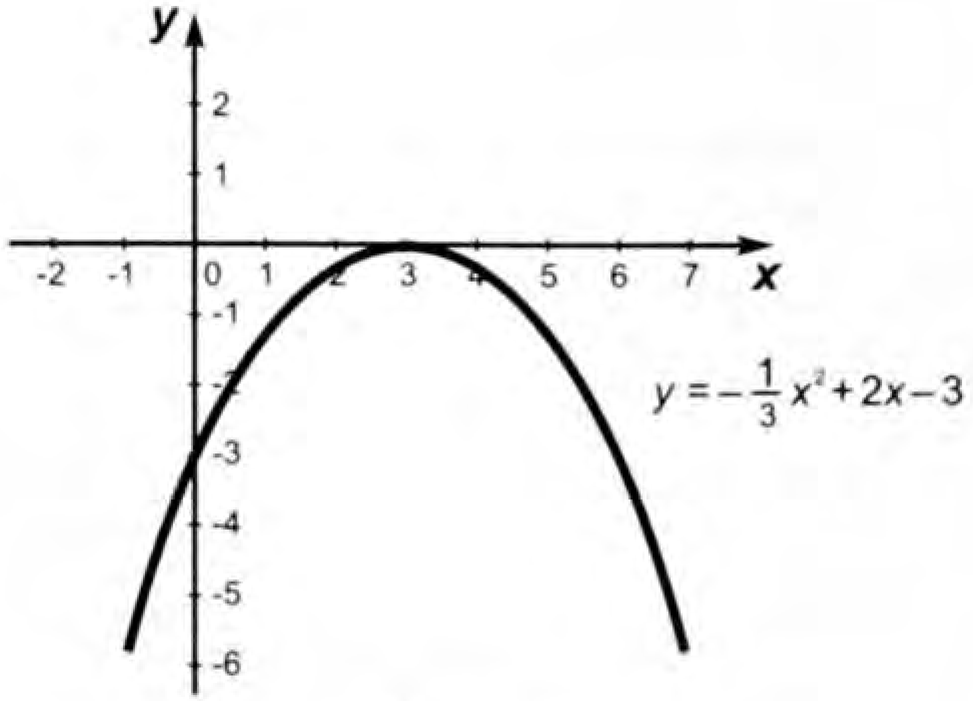
4 - м и с а л. $x^2-2x+3>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$y=x^2-2x+3$ функциясынын графиги — тармактары жогору карай багытталган парабола.

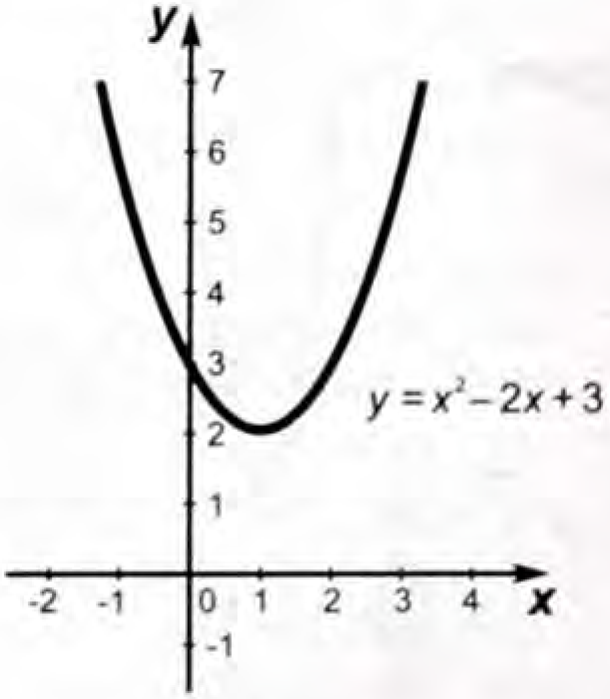
Парабола Ox огуна карата кандай жайланышкандыгын билүү үчүн $x^2-2x+3=0$ теңдемесин чыгарабыз. Мында $D=(-2)^2-4\cdot3=$ $=-8<0$ болорун табабыз, б. а. бул теңдеме тамырларга ээ болбойт. Демек, парабола Ox огу менен жалпы чекиттерге ээ болбойт.

Координата тегиздигинде параболанын жайланышын схемалык түрдө сызып көрсөтүп (24-сүрөт), x тин каалагандай маанилеринде функция оң маанилерди аларын табабыз.

Жообу: x каалагандай сан.



23-сүрөт.



24-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

56. (*Оозеки*). Төмөнкү барабарсыздыктын кайсылары квадраттык барабарсыздык:

а) $3x^2-7>0$; в) $4x+7>0$; д) $4x-5\leq 0$; ж) $x^3-16>0$;
б) $x^2-4x+5\leq 0$; г) $x^2-6\leq 0$; е) $x^3-9>0$; з) $5x^2-x+9\geq 0$.

57. Төмөнкү барабарсыздыктарды квадраттык барабарсыздыкка келтиргиле:

а) $4x^2<5x+8$; в) $x^2+x-1>2x^2-2x+2$;
б) $-x^2+x\geq 2$; г) $2x(x+2)<x-4$.

58. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x^2-3x+2<0$; г) $2x^2-7x+6>0$; ж) $-5x^2+11x-6>0$;
б) $x^2+2x-48<0$; д) $3x^2+2x-1>0$; з) $-2x^2+7x<0$;
в) $2x^2+3x-2\geq 0$; е) $-x^2+2x+15<0$; и) $(x-1)^2(x+1)\leq 0$.

59. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $2x^2+15x-7>2x$; д) $2\cdot(x-\frac{1}{3})^2>0$;
б) $-x^2-x\geq x^2+4x-18$; е) $7\cdot(\frac{1}{6}-x)^2\leq 0$;
в) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$; ж) $3x^2-3<x^2-x$;
г) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$; з) $(x-1)(x+3)>5$.

60. ax^2+bx+c көп мүчөсү x_1 жана x_2 тамырларына ээ болсун, мында $x_1<x_2$. Каалагандай x_0 санын (x_1, x_2) аралыгынан алалы, б.а. $x_1<x_0<x_2$ болсун. Анда $a(ax_0^2+bx_0+c)<0$ барабарсыздыгы аткарыларын далилдегиле.

61. Удаалаш үч натуралдык сандардын биринчи эки санынын көбөйтүндүсү 72ден кичине, ал эми акыркы эки санынын көбөйтүндүсү 72ден кичине эмес. Бул сандарды тапкыла.

2. Интервалдар методу

Барабарсыздыктарды чыгарууда интервалдар методу көп колдонулат. Бул методду мисалдарда көргөзөлү.

1-мисал: $x^2-5x+4>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$x^2-5x+4=0$ квадраттык теңдеменин тамырларын таап, $x_1=1$, $x_2=4$ экендигин билебиз. Анда $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

Сан огун $x=1$ жана $x=4$ сандары $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ жана $(4; +\infty)$ аралыктарына бөлөт (25-сүрөт).

$(x-1)(x-4)$ туюнтмасы эки көбөйтүүчүлөрдүн көбөйтүндүсүнөн турат. Каралып жаткан аралыктарда бул көбөйтүүчүлөрдүн ар биринин белгиси төмөндөгү таблицада көрсөтүлгөн.

	$(-\infty; 1)$	$(1; 4)$	$(4; +\infty)$
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$

Мындан:

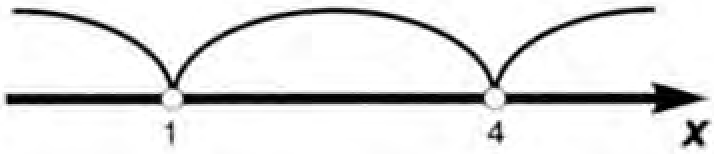
эгерде $x \in (-\infty; 1)$ болсо, анда $(x-1)(x-4)>0$;

эгерде $x \in (1; 4)$ болсо, анда $(x-1)(x-4)<0$;

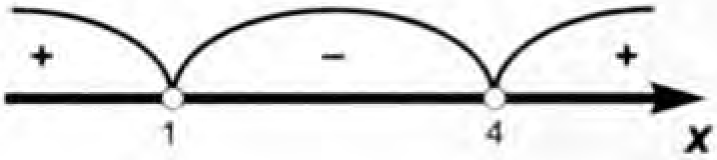
эгерде $x \in (4; +\infty)$ болсо, анда $(x-1)(x-4)>0$ боло тургандыгы келип чыгат.

Биз, $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$ аралыктарынын ар биринде $f(x)=(x-1)(x-4)$ функциясы белгисин сактай тургандыгын, ал эми 1 жана 4 чекиттери аркылуу өткөндө анын белгиси өзгөрөрүн көрөбүз (26-сүрөт). Демек, каалагандай $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ саны берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Бул каралган метод — интервалдар методу деп аталат.



25-сүрөт.



26-сүрөт.

2 - м и с а л: $x^3-4x<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

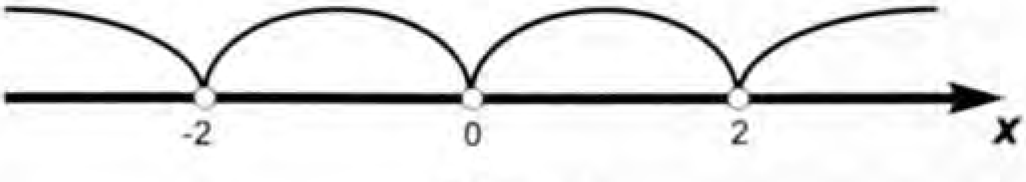
x^3-4x көп мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраталы:

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2).$$

Анда, берилген барабарсыздыкты төмөндөгүдөй жазсак болот:

$$(x+2)x(x-2)<0.$$

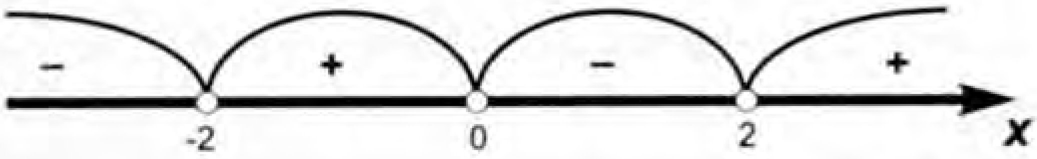
Сан огунда (-2); 0; 2 сандарын белгилейли. Бул чекиттер сан огун $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$ жана $(2; +\infty)$ аралыктарына бөлөт (27-сүрөт).



27-сүрөт.

Ал аралыктардын ар биринде $(x+2)x(x-2)$ туюнтмасынын белгилерин табабыз. Ал үчүн бул аралыктардын биринде функция кандай белгиге ээ болорун билүү жетиштүү болот, андан кийин белгилердин ирети боюнча өзгөрүү касиетин пайдаланып, калган бардык аралыктарда белгилерди аныктоо керек. Мында оң жактагы четки $(2; +\infty)$ аралыктан баштоо оңтойлуу, анткени — ал аралыкта $(x+2)x(x-2)$ туюнтмасынын мааниси оң экендиги белгилүү. Себеби, $x \in (2; +\infty)$ болсо, анда $x+2$, x жана $x-2$ көбөйтүүчүлөрү оң. Белгилердин ирети боюнча өзгөрүү касиетин пайдаланып, координата сызыгы боюнча ондон солду карай калган аралыктардын ар биринде берилген туюнтманын белгилерин аныктайбыз.

Барабарсыздыктын чыгарылыштарынын көптүгү болуп $(-\infty; -2)$ жана $(0; 2)$ аралыктарынын биригүүсү эсептелээри 28-сүрөттөн көрүнүп турат.



28-сүрөт.

Жообу: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$

Жалпысынан, функция $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ түрүндөгү формула менен берилсин, мында x — өзгөрмө, ал эми $x_1, x_2, ..., x_n$ бири-бирине барабар эмес сандар. $x_1, x_2, ..., x_n$ — сандары берилген функциянын нөлдөрү болот. Функциянын нөлдөрү аркылуу бөлүнгөн аныкталуу областынын аралыктарынын ар биринде функциянын белгиси сакталат, ал эми нөлү аркылуу өткөндө анын белгиси өзгөрөт.

Бул касиет

$$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)>0,$$
$$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)<0 \qquad (1)$$

түрүндөгү барабарсыздыктарды чыгаруу үчүн колдонулат.

3-мисал. $\frac{9-x}{x+3}>0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$\frac{9-x}{x+3}=\frac{(9-x)(x+3)}{(x+3)^2}$ болгондуктан $\frac{9-x}{x+3}$ бөлчөгүнүн белгиси $(9-x)\times$ $\times(x+3)$ көбөйтүндүсүнүн белгиси менен дал келет. Демек, берилген барабарсыздык $(9-x)(x+3)>0$ барабарсыздыгына *тең күчтө болот.* $(9-x)(x+3)>0$ барабарсыздыкты (-1) санына көбөйтүп, (1) түргө, б.а. $(x+3)(x-9)<0$ түрүндөгү тең күчтүү барабарсыздыкка келтиребиз. Аны интервалдар методу менен чыгарып, берилген барабарсыздыктын чыгарылыштарынын көптүгү $(-3; 9)$ болоруна ишенебиз.

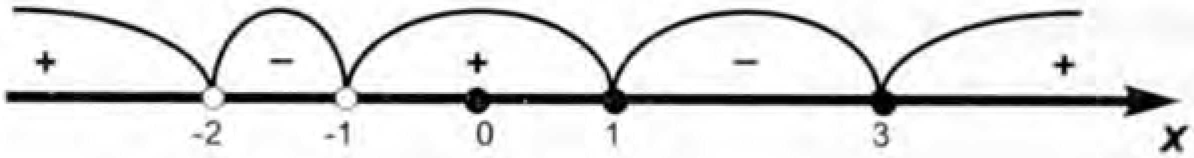
Жообу: $(-3; 9)$.

4-мисал. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}\geq 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Берилген бөлчөктүн алымындагы жана бөлүмүндөгү көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратып,

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+1)} \geq 0$$

барабарсыздыгына келебиз. Берилген бөлчөктүн алымынын же бөлүмүнүн нөлдөрү болуп эсептелген −2; −1; 1; 3 сандарын сан огунда белгилейбиз. Бул чекиттер сан огун $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$ интервалдарына бөлөт. Эгер $x \in (3; +\infty)$ болсо, анда бөлчөктүн алымындагы жана бөлүмүндөгү бардык көбөйтүүчүлөрдүн белгиси оң болгондуктан, берилген бөлчөктүн белгиси оң болот. Бир интервалдан кийинки интервалга өткөндө бөлчөктүн белгиси өзгөргөндүктөн, бөлүнгөн беш интервалдын ар бир инде берилген бөлчөктүн белгисин аныктайбыз (29-сүрөт). $x=1$ жана $x=3$ сандары берилген барабарсыздыкты канааттандырат. Ал эми $x=-2$ жана $x=-1$ маанилери үчүн берилген бөлчөк аныкталган эмес. Демек, берилген барабарсыздыктын чыгарылыштарынын көптүгү болуп $(-\infty; -2)$, $(-1; 1]$ жана $[3; +\infty)$ аралыктарынын биригүүсү эсептелээри 29-сүрөттөн көрүнүп турат.



29-сүрөт.

Жообу: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1] \cup [3; +\infty)$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

62. (*Оозеки*) $x=7$ саны төмөнкү барабарсыздыктын чыгарылышы болорун көрсөткүлө:

а) $(x+1)(x-5)>0$;
в) $(x+2)(x+1)>0$;
б) $(x-1)(x-4,5)>0$;
г) $(x-9)(x-10)>0$.

63. Барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгаргыла:

а) $(x+3)(x-7)>0$;
в) $(x-3)(x+\frac{1}{2})<0$;
б) $(x+7)(x-6)<0$;
г) $(x+4)(x-4,5)>0$.

64. Барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгаргыла:

а) $x^2+6x<0$;
в) $x^2+x-12<0$;
б) $x^2-7x>0$;
г) $x^2-2x-3>0$.

65. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x-2)(x-4)(x-9)>0$;
в) $x(x+1)(x+7)(x-4)>0$;
б) $(x+9)(x+1)(x-3)\leq 0$;
г) $x^3(x-1)^2(x+2)\geq 0$.

66. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x^3-16x\geq0$;

б) $4x^3-x>0$;

в) $(x^2-1)(x+3)<0$;

г) $(x^2-9)(x-4)\geq0$.

67. Барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгаргыла:

а) $6(x-11)(x+15)<0$;

б) $(x+3)(4-x)\geq0$;

в) $(6+4x)(3x-1)\leq0$;

г) $(4-2x)(3-4x)<0$.

68. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x^2-4x+3)(x^2+5x+4)\geq0$;

б) $(x^2-x-2)(x^2-6x+5)\leq0$;

в) $(x^3-9x)(x^2-6x+8)\geq0$;

г) $x^2(x^4-1)>0$.

69. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=\sqrt{(7-2x)(x+9)}$;

б) $y=\sqrt{(3x+12)(3-x)(x+5)}$;

в) $y=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x+3)}}$;

г) $y=\frac{1+\sqrt{(4x+8)(x-3)}}{\sqrt{(x+5)(x-6)}}$;

д) $y=\frac{4}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

е) $y=\frac{3-\sqrt{x^3-4x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

70. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\frac{x-8}{x+10}>0$;

б) $\frac{6x-1{,}8}{4-x}\leq0$;

в) $\frac{x+1{,}4}{1{,}9-x}>0$;

г) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}\leq0$;

д) $\frac{x^3-x}{x^2-2x-8}>0$;

е) $\frac{x+5}{x^3-16x}\geq0$.

I ГЛАВАГА КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

71. $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ функциясы үчүн: $f(0)$, $f(-4)$, $f(5)$, $f(-2)$, $f(9)$, $f(11)$ ди тапкыла.

72. $y=\frac{1}{x^4+2}$ функциясынын графиги Ox огун кесип өтөбү? Oy огунчу? Бул функциянын графиги кайсы координаттык чейректерде жайланышкан?

73. Функциянын нөлдөрүн тапкыла (эгерде алар бар болсо):

а) $y=\frac{4x+10}{3}$;

б) $y=\frac{4x^2-16}{5}$;

в) $y=\frac{5}{6-2x}$.

74. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=\frac{3}{7x+1}-\frac{4}{x-3}$;

б) $y=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}$;

в) $y=\frac{1}{3+\frac{4}{x}}$;

г) $y=\frac{3}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x-4}}$.

75. Төмөндөгү формула менен берилген функция өсүүчү же кемүүчү болуп эсептелеби:

а) $y=x^2+1$; в) $y=-0{,}4x+2$; д) $y=\sqrt{x}+3$;

б) $y=\frac{2}{3}x+2$; г) $y=10-x$; е) $y=x^3$.

76. Параболанын чокусунун координаталарын тапкыла:

а) $y=x^2-4x-5$; в) $y=x^2-6x+10$;

б) $y=-x^2-2x+3$; г) $y=(x-2)(x+3)$.

77. Функциянын графигин түзбөй туруп, анын эң чоң же эң кичине маанисин тапкыла:

а) $y=x^2+2x+5$; в) $y=-4x^2+8x$;

б) $y=-x^2+2x+1$; г) $y=3x^2+4x+5$.

78. Тик бурчтуктун периметри 600 м. Тик бурчтук эң чоң аянтка ээ болуш үчүн, анын бийиктиги кандай маанилерге ээ болот?

79. Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x^2+\sqrt{2}\,x-2$; в) $\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x+3{,}5$;

б) $0{,}8x^2-19{,}8x-5$; г) $x^2-\sqrt{6}\,x+1$.

80. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{3a^2-12}{a^2+6a+8}$; в) $\frac{a-1}{a+1}+\frac{1-a}{a^2+3a+2}$;

б) $\frac{2m^2-5m+2}{mn-2n-3m+6}$; г) $\frac{2a^2-7}{a^2-3a-4}-\frac{a+1}{a-4}$.

81. Функция $y=x^2+px+q$ формуласы менен берилген. Эгерде:

а) функциянын графиги координаталар окторун (0; 6) жана (2; 0) чекиттеринде кесип өтөөрү;

б) функциянын нөлдөрү 4 жана 1 сандары экендиги;

в) функцияны графиги (0; 2) жана (1; 3) чекиттери аркылуу өтөрү белгилүү болсо, анда p менен q нун маанилерин тапкыла.

82. Төмөнкү функциялар:

а) $y=x^2+3x+2$ жана $y=|7-x|$; б) $y=3x^2-6x+3$ жана $y=|3x-3|$, x тин кандай маанилеринде бирдей мааниге ээ болушат?

83. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x-4)(x-5)>0$; д) $2x^2+3x-2<0$; и) $(x-2)(x^2-9)>0$;

б) $(5{,}7-x)(x-7{,}2)>0$; е) $-x^2+6x-9<0$; к) $(x^2-1)(x+4)<0$;

в) $x^2-5x-50<0$; ж) $x^2-3x+8<0$; л) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\le 0$;

г) $-2x^2+4x+30<0$; з) $x^2-5x+10\ge 0$; м) $\frac{2x^2-3x-2}{(x-1)(x+1)}<0$.

84. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x^2-1>1-x$; г) $x(x+1)\leq 3(x-1)^2$; ж) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}<\frac{3}{2x-2}$;

б) $x+7<3x^2-10$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3-x^2}<\frac{2}{\sqrt{3}-x}$; з) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geq 0$;

в) $\frac{x^2}{5}+4\leq\frac{7x}{5}$; е) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2+9x-9}<0$; и) $\frac{(x-1)^3(x+1)}{(x-2)^2(x+2)^3}\leq 0$.

85. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{144-9x^2}}$; б) $y=\frac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$.

86. Катер 4 сааттан көп эмес убакытта, суунун агымы боюнча 22,5 км аралыкты жүрүп, кайра келиш керек. Эгерде суунун агымынын ылдамдыгы 3 км/саат болсо, катер кандай ылдамдыкта жүрүш керек?

87. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 4x^2-27x-7>0, \\ x>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-4<0, \\ 3x^2-15x<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

88. Төмөнкү функциянын жуп же так экендигин аныктагыла:

а) $f(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$; г) $f(x)=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$;

б) $f(x)=0$; д) $f(x)=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

в) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$; е) $f(x)=\frac{|x-7|}{x+1}+\frac{|x+7|}{x-1}$.

89. Төмөнкү функция:

а) $y=\frac{5}{2x+1}$, $(-\infty; -0,5)$ интервалында кемий тургандыгын;

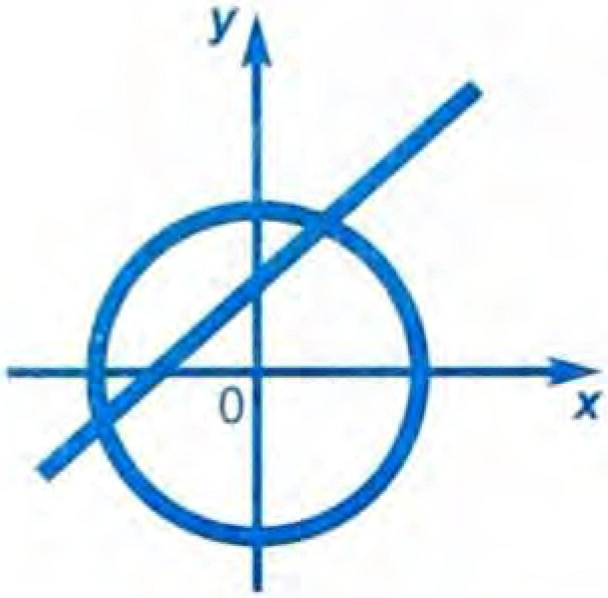
б) $y=\frac{4}{2-x}$, $(2; +\infty)$ интервалында өсө тургандыгын;

в) $y=12x-x^3$, $[2; +\infty)$ аралыгында кемий тургандыгын;

г) $y=3\sqrt{4x+1}-1$, $[-0,25; +\infty)$ аралыгында өсө тургандыгын далилдегиле.

90. Эгерде $f(x)=x^2$ болсо, анда ар кандай x_1 жана x_2 сандары үчүн $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ барабарсыздыгы аткарыларын далилдегиле.

91. Эгерде $f(x)=\sqrt{x}$ болсо, анда ар кандай x_1 жана x_2 сандары үчүн $f(\frac{x_1+x_2}{2})\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ барабарсыздыгы аткарыларын далилдегиле.



II глава

ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

---

§ 1. БИР ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

Теңдеменин оң жана сол жактары көп мүчөлөр болсо, анда ал теңдеме *бүтүн теңдеме* деп аталат. Мисалы

$$3(x^2+1)(x-1)=6x-7.$$

жана

$$\frac{x^4-1}{5}-\frac{x^2+6}{3}=4x^2$$

теңдемелери бүтүн теңдемелер.

Ар кандай бүтүн теңдеменин оң жагын сол жагына которуп, окшош мүчөлөрүн топтосок, ал теңдеме n-даражадагы стандарттуу жазылган теңдемеге, б.а.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0,$$

түрүндөгү теңдемеге келтирилет. Мында a_0, a_1,..., a_n — белгилүү анык сандар, n — белгилүү натуралдык сан, $a_0\neq0$.

Биринчи даражадагы $a_0x+a_1=0$ теңдеме жалгыз гана $x=-\frac{a_1}{a_0}$ чыгарылышына ээ болот.

Экинчи даражадагы $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ теңдеменин тамырларынын саны $D=a_1^2-4a_0a_2$ дискриминантынан көз каранды болот. Эгерде $D>0$ болсо, анда теңдеме эки тамырга ээ болот; эгерде $D=0$ болсо, анда теңдеме бир тамырга ээ болот; эгерде $D<0$ болсо, анда теңдеме тамырларга ээ болбойт. Экинчи даражадагы ар кандай теңдеме экиден көп эмес тамырларга ээ болот. Бизге белгилүү болгондой, $D\geq0$ болгондо тамырларды табуу үчүн квадраттык теңдеменин тамырларын табуу формуласы $x=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2a_0}$ колдонулат.

Үчүнчү даражадагы теңдеме $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ түрүндө, ал эми төртүнчү даражадагы теңдеме $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ түрүндө жазылат. Үчүнчү даражадагы теңдеме үчтөн көп эмес, төртүнчү даражадагы теңдеме төрттөн көп эмес тамырларга ээ болорун далилдөөгө болот. Жалпысынан, n-даражадагы теңдеме n ден көп эмес тамырларга ээ болот.

Үчүнчү жана төртүнчү даражадагы теңдемелердин тамырларын табуу формуласы бар, бирок ал формулалар татаал. Бешинчи жана андан жогорку даражалуу теңдемелердин тамырларын табуунун жалпы формуласы жок.

Кээде үчүнчү же андан жогорку даражадагы теңдемени, кандайдыр бир ыкманы колдонуп чыгарууга мүмкүнчүлүк болот. Мисалы, кээ бир теңдемелерди көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуунун жардамы менен чыгаруу ыңгайлуу.

1-мисал. $x^3-8x^2+1=x^2+x-8$ (1)

теңдемени чыгаргыла.

Теңдеменин оң жагын сол жагына которуп, окшош мүчөлөрдү топтойбуз. Натыйжада төмөндөгүнү алабыз:

$$x^3-8x^2+1-x^2-x+8=0,$$

$$x^3-9x^2-x+9=0.$$

Акыркы теңдеменин сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2(x-9)-(x-9)=0,$$

$$(x-9)(x^2-1)=0,$$

$$(x-9)(x-1)(x+1)=0$$

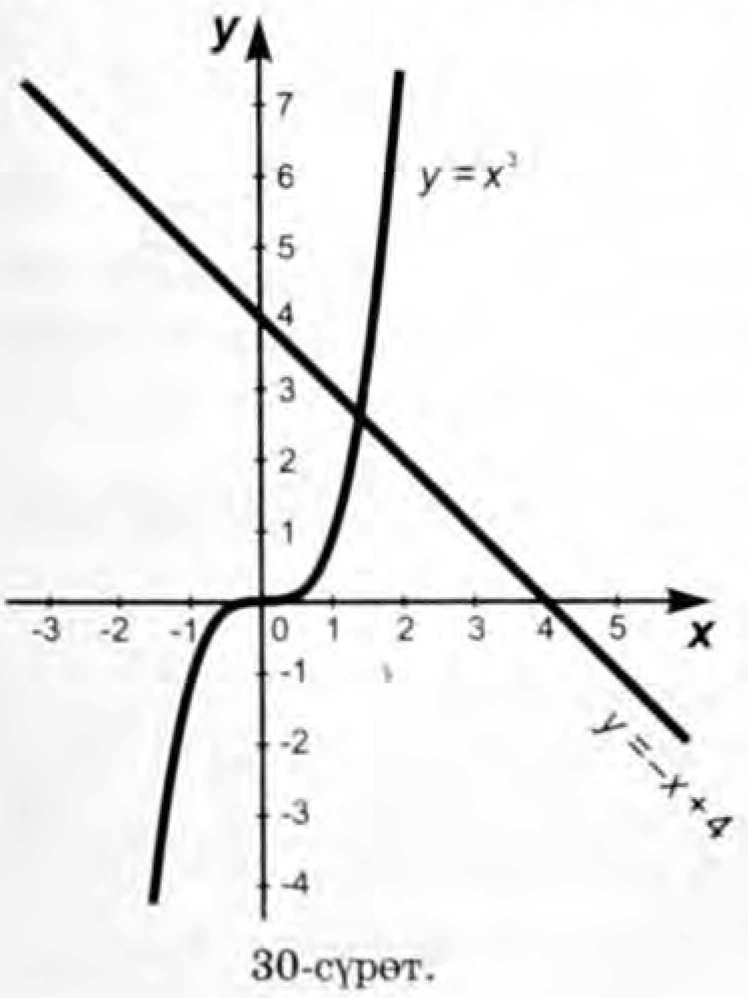
Мындан, (1) теңдеме үч тамырга ээ боло тургандыгын табабыз:

$$x_1=9,\ x_2=1,\ x_3=-1.$$

Кээ бир бүтүн теңдемелердин тамырларынын жакындаштырылган маанилерин табууда теңдемени чыгаруунун графиктик жолун пайдалануу ыңгайлуу болот.

2-мисал. $x^3+x-4=0$

теңдемесин чыгаргыла. (2)



30-сүрөт.

Берилген тендемени $x^3=-x+4$ түрүндө жазабыз. Бир эле координаталар системасында $y=x^3$ жана $y=-x+4$ функцияларынын графиктерин түзөбүз (30-сүрөт). Алар абциссасы 1,4кө жакын бир чекитте кесилишет.

Демек, (2) тендеме бир гана $x\approx1,4$ тамырга ээ болот. Графиктик жол натыйжанын жогорку тактыгын камсыз кыла албайт. Ошондуктан тамырды табуунун жогорку тактыгы талап кылынса, анда графиктик чыгарылышта алынган тамырдын жакындаштырылган маанисин эсептөөлөр аркылуу тактайшат.

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,\ a\neq0,\ \ n\geq2, \qquad (3)$$

түрүндөгү тендеме үч мүчөлүү теңдеме деп аталат. Мында n натуралдык сан a, b жана c белгилүү анык сандар. Эгерде $n=2$ болсо, анда (3) теңдеме биквадраттык теңдеме болуп калат.

Берилген (3) теңдемени чыгаруу үчүн x^n ди y аркылуу белгилеп, жаңы өзгөрмөнү кийиребиз:

$$x^n=y \tag{4}$$

Анда (3) тендемени

$$ay^2+by+c=0$$

түрүндөгү квадраттык теңдемеге келтиребиз. Квадраттык теңдемеден y ти таап, андан кийин (4) теңдемеден x ти таап, (3) теңдеменин чыгарылыштарын табабыз.

3 - мисал. Төмөндөгү биквадраттык теңдемени чыгаргыла.

$$9x^4-10x^2+1=0 \tag{5}$$

Ал үчүн x^2 ты y аркылуу белгилеп, жаңы өзгөрмөнү кийиребиз:

$$x^2=y$$

Өзгөрмөсү y болгон квадраттык теңдемени алабыз:

$$9y^2-10y+1=0.$$

Аны чыгарып, $y_1=\frac{1}{9}$, $y_2=1$ болорун табабыз. Демек, $x^2=\frac{1}{9}$ же $x^2=1$ болот. $x^2=\frac{1}{9}$ теңдемесинен $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}$ экендигин табабыз. $x^2=1$ тендемесинен $x_3=-1$, $x_4=1$ экендигин аныктайбыз. Ошентип (5) теңдеме төрт тамырга ээ болот:

$$x_1=-\frac{1}{3},\ \ x_2=\frac{1}{3},\ \ x_3=-1,\ \ x_4=1$$

Кээ бирде даражасы экиден жогору болгон биквадраттык эмес теңдемелерди да жаңы өзгөрмөнү кийирип чыгарууга мүмкүнчүлүк болот.

4 - мисал. Төмөндөгү тендемени чыгаргыла.

$$(x^2-5x+4)\ (x^2-5x+6)\ =120 \tag{6}$$

Ал үчүн x^2-5x ти y аркылуу белгилейбиз: $x^2-5x=y$ Анда (6) теңдемеден, y өзгөрмөсүнө карата квадраттык теңдемени алабыз:

$$(y+4)(y+6)=120,\ \ y^2+10y-96=0.$$

Акыркы квадраттык тендемени чыгарып, анын тамырларын табабыз:

$$y_1=-16,\ \ y_2=6.$$

Мындан $x^2-5x=-16$ же $x^2-5x=6$ келип чыгат.

$x^2-5x=-16$ тендемесин чыгарып, ал тамырларга ээ болбой тургандыгын байкайбыз. $x^2-5x=6$ теңдемесин чыгарып, ал эки тамырга ээ болорун табабыз: $x_1=-1$ жана $x_2=6$

Демек, (6)-теңдеме эки тамырга ээ: $x_1=-1$ жана $x_2=6$.

Төмөнкү $\sqrt{3-2x}=1-x$ жана $\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-6}$ теңдемелери *иррационалдык* теңдемелерге мисалдар болорун билесиңер.

Кээ бир иррационалдык теңдемелерди, бүтүн теңдемеге келтирип чыгарууга болот.

5 - м и с а л. $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$ (7)

теңдемесин чыгаргыла.

Берилген (7)-теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүп, төмөнкү теңдемени алабыз:

$$x^2+4x=14-x$$

Бул квадраттык теңдемени чыгарып, анын тамырларын табабыз:

$$x_1=-7 \text{ жана } x_2=2.$$

Бул сандар (7)-теңдеменин чыгарылыштары болорун текшеребиз. $x=-7$ ни (7)-теңдемеге койсок, анда $\sqrt{(-7)^2+4(-7)}=\sqrt{14-(-7)}$ туура барабардыгына ээ болобуз. Демек, $x=-7$ (7)-теңдеменин чыгарылышы болот.

$x=2$ ни (7)-теңдемеге койсок, анда $\sqrt{2^2+4\cdot 2}=\sqrt{14-2}$ туура барабардыгына ээ болобуз. Демек $x=2$ (7)-теңдеменин чыгарылышы болот.

Жообу: $x_1=-7$ жана $x_2=2$

$$ax^3+bx^2+bx+a=0, \quad a\neq 0 \tag{8}$$

түрүндөгү теңдеме *үчүнчү даражадагы симметриялуу теңдеме* деп аталат.

$$ax^3+bx^2+bx+a=(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]$$

болгондуктан, (8) теңдеме төмөнкү теңдемелерге келтирилет:

$$x+1=0 \text{ же } ax^2+(b-a)x+a=0.$$

Ал эми

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \tag{9}$$

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0, \tag{10}$$

түрүндөгү теңдемелер *төртүнчү даражадагы симметриялуу теңдемелер* деп аталат.

(9) жана (10) теңдемелердин эки жагын тең x^2 ка бөлүп, ал теңдемелерди төмөнкү теңдемелерге келтиребиз:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0, \tag{11}$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0, \tag{12}$$

Эми (11) теңдемеде $x+\frac{1}{x}$ ти y аркылуу, ал эми (12) теңдемеде $x-\frac{1}{x}$ ти z аркылуу белгилейбиз:

$$x+\frac{1}{x}=y, \tag{13}$$

$$x-\frac{1}{x}=z \tag{14}$$

Анда (11) теңдеме, б.а. (9) теңдеме y өзгөрмөсүнө карата, ал эми (12) теңдеме, б.а. (10) теңдеме z өзгөрмөсүнө карата төмөнкү квадраттык теңдемелерге келтирилет:

$$a(y^2-2)+by+c=0, \tag{15}$$

$$a(z^2+2)+bz+c=0. \tag{16}$$

Эми (15) квадраттык теңдемеден y ти таап, андан кийин (13) теңдемеден x ти таап, (9) теңдеменин чыгарылыштарын табабыз. Ал эми (16) квадраттык теңдемеден z ти таап, андан кийин (14) теңдемеден x ти таап, (10) теңдеменин чыгарылыштарын табабыз.

6-мисал. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ теңдемесин чыгаргыла.

$x=0$ саны берилген теңдеменин чыгарылышы болбогондуктан, ал теңдемени x^2 ка бөлүп төмөнкү теңдемени алабыз:

$$(x^2+\frac{1}{x^2})-2(x+\frac{1}{x})-1=0$$

Эми $x+\frac{1}{x}=y$ деп белгилеп, акыркы теңдемеден $y^2-2y-3=0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Бул квадраттык теңдеме $y_1=3$, $y_2=-1$ тамырларына ээ. Демек, берилген теңдеме төмөнкү теңдемелер менен тең күчтө:

$$x+\frac{1}{x}=3 \text{ же } x+\frac{1}{x}=-1.$$

Экинчи теңдеме чыгарылышка ээ эмес. Ал эми $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ сандары $x+\frac{1}{x}=3$ теңдемесининин, б.а. берилген теңдеменин чыгарылыштары болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2-8x+15=0$;

б) $\frac{(x+1)^2}{12}-\frac{1-x^2}{24}=4$;

в) $x^2-\frac{13}{4}x+0,75=0$;

г) $(8x-1)(2x-3)-(4x-1)^2=38$;

д) $\frac{1}{3}(15x-1)(1+15x)=\frac{8}{3}$;

е) $(6-x)(x+6)-(x-11)x=36$;

ж) $9x^2-\frac{(12x-11)(3x+8)}{4}=1$;

2. Теңдеменин даражасы кандай:

а) $3x^2-8x^4+x+1=0$;

б) $(x^2+3)(x-4)=0$;

4

в) $x^4-9x^2+4=0$;

г) $6x^3-6x(x^2+5)=9$.

3. а) $\sqrt{3}$ саны $x^2-4x-21=0$ теңдемесинин тамыры болобу?

б) $10-2\sqrt{5}$ саны $x^2-20x+80=0$ теңдемесинин тамыры болобу?

4. $8x^8+7x^6+x^4+2x^2+1=0$ теңдемеси тамырга ээ болбой тургандыгын далилдегиле.

5. b нын кандай маанилеринде теңдеме эки тамырга ээ болот:

а) $2x^2+6x+b=0$;

б) $5x^2-4x+3b=0$;

в) $3x^2+bx+3=0$;

г) $x^2+bx+5=0$.

6. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2x^2-(a-1)x+a+1=0$;

б) $ax^2-(a+1)x+1=0$;

в) $y^3-6y=0$;

д) $6x^4+3,6x^2=0$;

г) $9x^3-18x^2-x+2=0$;

е) $y^4-y^3-16y^2+16y=0$.

7. b нын кандай маанилеринде теңдеме бир тамырга ээ болот:

а) $3x^2-6x+2b=0$;

б) $5x^2+2bx+5=0$;

в) $x^2-3bx+18=0$;

г) $2x^2-12x+3b=0$.

8. b нын кандай маанилеринде теңдеме тамырга ээ болбойт:

а) $6x^2+bx+6=0$;

б) $12x^2+4x+b=0$;

в) $2x^2-15x+b=0$;

г) $2x^2+bx+18=0$.

9. Теңдемени чыгаргыла:

а) $0,7x^4-x^3=0$;

б) $x^4-x^2=3x^3-3x$;

в) $x^3-0,1x=0,3x^2$;

г) $0,5x^3-72x=0$;

д) $2x^4-18x^2=5x^3-45x$;

е) $x^3+4x=5x^2$;

ж) $3x^2-2x=2x^3-3$.

з) $x^4+x^2=2x^3+2x$.

10. Биквадраттык теңдемени чыгаргыла:

а) $x^4-25x^2+144=0$;

б) $x^4-5x^2-36=0$;

в) $4x^4-5x^2+1=0$;

г) $9x^4-9x^2+2=0$;

д) $x^4-4x^2+4=0$;

е) $y^4-6y^2+8=0$;

ж) $t^4+10t^2+25=0$;

з) $5y^4-5y^2+2=0$.

11. Жаңы өзгөрмөнү киирүүнү пайдаланып, төмөндөгү теңдемени чыгаргыла:

а) $(2x^2+3)^2-12(2x^2+3)+11=0$;

б) $(t^2-2t)^2-3=(t^2-2t)$;

в) $(x^2+x-1)(x^2+x+2)=40$;

г) $(2x^2+x-1)(2x^2+x-4)+2=0$;

д) $(x^2-1)(x^2+1)-4(x^2-11)=0$;

е) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+7)+5=0$.

12. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^5+x^4-6x^3-6x^2+5x+5=0$;

б) $x^5-x^4-2x^3+2x^2-3x+3=0$;

в) $x^8-17x^4+16=0$;

г) $x^6-3x^3+2=0$;

д) $x^3+2x^2+2x+1=0$;

е) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.

13. Иррационалдык теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{2-x^2}=x$; г) $\sqrt{3x+4}=x$; ж) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

б) $\sqrt{5-2x}=1-x$; д) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; з) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$;

в) $\sqrt{x-2}+3=0$; е) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$; и) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

§ 2. ЭКИ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ЭКИ ТЕҢДЕМЕНИН СИСТЕМАСЫ

1. Сызыктуу теңдемени кармаган система

Эгерде эки өзгөрмөлүү системанын бир теңдемеси сызыктуу теңдеме, ал эми экинчи теңдемеси сызыктуу эмес болсо, анда ал системаны ордуна коюу жолу менен төмөндөгүдөй чыгарсак болот:

1) сызыктуу теңдемеден бир өзгөрмөнү экинчи өзгөрмө аркылуу туюнтушат;

2) табылган туюнтманы сызыктуу эмес теңдемеге коюп, бир өзгөрмөлүү теңдемени алышат;

3) алынган бир өзгөрмөлүү теңдемени чыгарышат;

4) экинчи өзгөрмөнүн туура келүүчү маанисин табышат.

1-мисал. Төмөндөгү теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=2, \\ x+2y=1. \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден x өзгөрмөсүн y аркылуу туюнтабыз:

$$x=1-2y$$

Биринчи теңдемеге x тин ордуна $1-2y$ туюнтмасын коюп, y өзгөрмөлүү теңдемени алабыз:

$$(1-2y)^2-3(1-2y)y-2y^2=2.$$

Акыркы теңдемени жөнөкөйлөтүп, төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз:

$$8y^2-7y-1=0.$$

Аны чыгарып,

$$y_1=-\frac{1}{8},\ y_2=1$$

экендигин табабыз.

y тин табылган маанилерин $x=1-2y$ формуласына коёбуз.

$y_1=-\frac{1}{8}$ маанисин $x=1-2y$ формуласына коюп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$x_1=1-2(-\frac{1}{8})=\frac{5}{4}$$

$y_2=1$ маанисин $x=1-2y$ формуласына коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$x_2=1-2\cdot 1=-1.$$

Ошентип, система эки чыгарылышка ээ болот:

$$x_1=1\frac{1}{4},\ y_1=\frac{-1}{8} \text{ жана } x_2=-1,\ y_2=1.$$

Жоопту түгөй сан түрүндө: $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $(-1; 1)$ деп жазууга болот.

2. Бир тектүү теңдемени кармаган система

Эгерде теңдеме $ax^2+bxy+cy^2=0$ түрүндө жазылса, анда ал теңдеме *бир тектүү* деп аталат. Бул учурда, бир тектүү теңдеменин жардамы менен бир белгисизди экинчи белгисиз аркылуу сызыктуу туюнтса болот.

2 - мисал. Төмөндөгү теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

Биринчи теңдемени y^2 ка бөлүп, $t=\frac{x}{y}$ белгисизине карата төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз:

$$t^2-5t+6=0.$$

$$t_1=2,\ t_2=3$$

экендигин табабыз. Анда

$$x=2y \text{ же } x=3y.$$

Системанын экинчи теңдемесине, $x=2y$ ти коюп, $y^2=2$ ни алабыз. Мындан

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{2},\quad x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}.$$

Ал эми, системанын экинчи теңдемесине $x=3y$ ти коюп, $y^2=1$ ди алабыз. Мындан

$$y_{3,4}=\pm1,\quad x_{3,4}=\pm3.$$

Демек, система төрт чыгарылышка ээ болот:

$$x_1=2\sqrt{2},\ y_1=\sqrt{2};\ x_2=-2\sqrt{2},\ y_2=-\sqrt{2};$$

$$x_3=3,\ y_3=1, \text{ жана } x_4=-3,\ y_4=-1.$$

Төмөнкү

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1,\ d_1\neq0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2,\ d_2\neq0 \end{cases}$$

теңдемелер системасын бир тектүү теңдемени кармаган системага келтирсе болот. Ал үчүн системанын биринчи теңдемесин d_2 ге көбөйтүп, ал эми системанын экинчи теңдемесин $(-d_1)$ ге көбөйтүп, алынган теңдемелерди кошуп, бир тектүү теңдеме алабыз.

3 - мисал. Төмөндөгү теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x^2+xy=2 \end{cases}$$

Берилген системанын биринчи теңдемесин 2ге көбөйтүп, ал эми экинчи теңдемесин (–1) ге көбөйтүп, алынган теңдемелерди кошуп төмөнкү бир тектүү теңдемени алабыз:

$$x^2-xy-2y^2=0.$$

Акыркы теңдемени y^2 ка бөлүп, $t=\frac{x}{y}$ белгисизине карата төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз:

$$t^2-t-2=0.$$

Аны чыгарып,

$$t_1=-1,\ t_2=2$$

экендигин табабыз. Анда, берилген система, төмөнкү эки система тең күчтүү болот.

$$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x=-y \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x=2y. \end{cases}$$

Бул эки системанын, биринчиси чыгарылышка ээ эмес, ал эми экинчиси эки чыгарылышка ээ:

$$x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{жана} \quad x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \ y_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Демек, берилген система $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ жана $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ чыгарылыштарына ээ болот.

3. Симметриялуу теңдемелер системасы

Эгерде эки өзгөрмөлүү теңдемелер системасынын теңдемелеринде, өзгөрмөлөр x тин жана y тин ордуларын алмаштырсак теңдемелер өзгөрбөсө, анда ал система *симметриялуу теңдемелер системасы* деп аталат. Мындай системаларды чыгаруу үчүн, жаңы u жана v өзгөрмөлөрүн төмөнкү формулалардын жардамы менен кийиребиз:

$$u=x+y,$$
$$v=xy$$

Мында төмөнкү барабардыктарды колдонгон ыңгайлуу болот:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv,$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2$$

4-мисал. Төмөндөгү теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5\ . \end{cases}$$

Жаңы $u=x+y$ жана $v=xy$ өзгөрмөлөрүн кийирип, берилген системанын төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$\begin{cases} uv=6, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Акыркы системанын экинчи теңдемесинен v өзгөрмөсүн u аркылуу туюнтабыз:

$$v=5-u$$

Акыркы системадагы биринчи теңдемеге v нын ордуна $5-u$ туюнтмасын коюп u өзгөрмөсүнө карата төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз:

$$u(5-u)=6,\quad u^2-5u+6=0.$$

Аны чыгарып,

$$u_1=2,\ u_2=3$$

экендигин табабыз.

Эми u нын табылган маанилерин $v=5-u$ формуласына коюп, $u_1=2$, болгондо $v_1=3$ экендигин, ал эми $u_2=3$ болгондо $v_2=2$ экендигин табабыз. Бирок,

$$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$$

Анда, берилген система, төмөнкү эки системага тең күчтүү:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3, \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Бул эки системанын биринчиси чыгарылышка ээ эмес, ал эми экинчиси эки чыгарылышка ээ:

$$x_1=1,\ y_1=2 \quad \text{жана} \quad x_1=2,\ y_1=1$$

Демек, берилген система (1; 2) жана (2; 1) чыгарылыштарына ээ болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

14. Ордуна коюу жолун колдонуп, теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ y^2-x=39; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y^2=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y=14, \\ y-x=8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=4, \\ y+xy=6. \end{cases}$

15. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^3-y^3=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^3+y^3=26. \end{cases}$

16. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2-3y^2=52, \\ y-x=14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=3a, \\ xy=2a^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=32, \\ 2x-y=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=3a, \\ xy=4a^2. \end{cases}$

17. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0, \\ y^2-x^2=12. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0, \\ x^2-5xy+2y^2=-4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-xy+5y^2=0, \\ 3x^2+2xy+7y^2=9. \end{cases}$

18. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2x^2-xy-y^2=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-3xy+3y^2=80, \\ x^2+xy-2y^2=-56; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

19. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy-29=x+y, \\ x^2+y^2=x+y+72; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ xy(x+y)=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y+xy^2=20, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^4+y^4=97, \\ xy=6. \end{cases}$

20. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=4(x+y)-3, \\ 2x+2y=5-xy; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy+2x+2y=5, \\ x^2+y^2+3x+3y=8. \end{cases}$

21. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=\frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy+x-y=7, \\ x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ xy+\frac{6(x-y)}{x+y}=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2y^2=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3-y^3=7(x-y), \\ (x+1)(y+1)=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=2, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

22. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^3y^2-y^3x^2=36, \\ 2x^2y-y^2x=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^5-y^5=3093, \\ x-y=3. \end{cases}$

§ 3. ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЖАРДАМЫ МЕНЕН МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

1-маселе. *А* жана *В* пункттарынан бир убакытта бирибирин көздөй эки киши жөө чыгышып, 30 минутадан кийин кезигишти. Сапарларын андан ары улантышып, биринчиси *В* пунктуна келди, ал эми экинчиси андан кийин 11 минутадан соң *А* пунктуна келди. Бул эки кишинин ар бири *А* дан *В* га чейинки аралыкты канча убакытта басып өтүштү?

А дан *В* га чейинки аралык s ке барабар болсун дейли, биринчи киши бул аралыкты t минутада басып өтсүн. Маселенин шарты боюнча экинчиси *А* дан *В* га чейинки аралыкты $(t+11)$ минутада басып өтөт. Демек, биринчисинин ылдамдыгы $\frac{s}{t}$ га барабар, ал эми экинчисинин ылдамдыгы $\frac{s}{t+11}$ ге барабар. Анда, 30 минутада биринчиси $30\frac{s}{t}$ аралыкты, ал эми экинчиси $\frac{30s}{t+11}$ аралыкты басып өтөт. Бирок, маселенин шарты боюнча бир убакытта чыккан эки киши, 30 минутадан кийин кезигип жатышат, б.а.

$$\frac{30s}{t}+\frac{30s}{t+11}=s\,.$$

Акыркы теңдеменин эки жагын тең s ке бөлүп, төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\frac{30}{t}+\frac{30}{t+11}=1\,.$$

Мындан, төмөнкү квадраттык теңдемеге келебиз:

$$t^2-49t-330 = 0.$$

Аны чыгарып,

$$t_1=55,\ t_2=-6 \text{ ны}$$

табабыз.

Бирок, $t=-6$ болушу мүмкүн эмес, себеби $t>0$. Демек, A дан B га чейинки аралыкты биринчиси $t=55$ минутада, ал эми экинчиси $t+11=55+11=66$ минутада басып өтөт.

2-маселе. Жаңы терилген козу карындын 90% ти ным, ал эми кургатылган козу карындын 12% ти ным. Жаңы терилген 10 кг козу карындан канча килограмм кургатылган козу карын алса болот?

Жаңы терилген 10 кг козу карын, x кг кургатылган козу карын болсун дейли. Маселенин шарты боюнча, жаңы терилген 10 кг козу карында $\frac{10\,\text{кг}\cdot 90\%}{100\%}=9$ кг ным бар, ал эми x кг кургатылган козу карында $\frac{x\,кг\cdot 12\%}{100\%}=\frac{3}{25}x$ кг ным бар. Анда

$$x-\frac{3}{25}x=10-9\ .$$

Мындан

$$\frac{22}{25}x=1\,.$$

Аны чыгарып,

$$x=1\frac{3}{22}\ \text{кг.}$$

Демек, жаңы терилген 10 кг козу карындан $1\frac{3}{22}$ кг кургатылган козу карын алсак болот.

3-маселе. Тик бурчтуктун диагоналы 10 см ге барабар, ал эми анын периметри 28 см ге барабар. Бул тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

Тик бурчтуктун негизи x см ге барабар, ал эми бийиктиги y см ге барабар болсун дейли. Тик бурчтуктун периметри 28 см ге барабар, б.а.

$$2x+2y=28.$$

Тик бурчтуктун диагоналы 10 см ге барабар болгондуктан, Пифагордун теоремасы боюнча

$$x^2+y^2=10^2.$$

Ошентип, төмөндөгү теңдемелер системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases}2x+2y=28,\\ x^2+y^2=100.\end{cases}$$

Мындан

$$\begin{cases} y=14-x, \\ x^2-14x+48=0. \end{cases}$$

Аны чыгарып,

$$x_1=6,\ y_1=8 \text{ жана } x_2=8,\ y_2=6$$

экендигин табабыз. Демек, тик бурчтуктун жактары 6 см жана 8 см.

КӨНҮГҮҮЛӨР

23. Аэродромдон бир убакытта бири батышты көздөй, ал эми экинчиси түштүктү көздөй эки самолет учту. Эки сааттан кийин эки самолеттун арасындагы аралык 2000 км болду. Биринчи самолеттун ылдамдыгы экинчи самолеттун ылдамдыгынын 75% ине барабар. Ал самолеттордун ылдамдыктарын тапкыла.

24. Катер эки саатта дарыянын агымы менен 18 км, ал эми дарыянын агымына карама-каршы 20 км сүздү. Эгерде катердин өзүнүн ылдамдыгы 20 км/саат болсо, дарыянын агымынын ылдамдыгын тапкыла.

25. *A* жана *B* станцияларынын арасындагы аралык 120 км. Түнкү саат 12де *A* дан *B* ны көздөй биринчи поезд жөнөдү. Ошол эле түнү түнкү саат 3тө ылдамдыгы биринчи поезддин ылдамдыгынан 10 км/саат ка көп болгон, экинчи поезд *A* дан *B* ны көздөй жөнөдү. Экинчи поезд *B* станциясына биринчи поезд келгенден кийин 2 сааттан кийин келди. Экинчи поезд *B* станциясына саат канчада келди?

26. Шаардын калкынын саны 2 жылда 20000ден 22050гө өстү. Бул шаардын калкынын орточо жылдык өсүү процентин тапкыла.

27. Тик бурчтуктун периметри 80 см ге барабар. Эгерде тик бурчтуктун негизин 8 см ге, ал эми бийиктигин 2 см ге чоңойтсок, анда тик бурчтуктун аянты бир жарым эсе чоңоёт. Тик бурчтуктун жактары кандай узундукта?

28. Эки сандын суммасы 12ге барабар, ал эми алардын көбөйтүндүсү 35ке барабар. Ал сандарды тапкыла.

29. Бир сан экинчи сандан 7ге чоң, ал эми алардын көбөйтүндүсү (−12)ге барабар. Ал сандарды тапкыла.

30. Тик бурчтуктун жактарынын бири экинчисинен 14 см ге чоң. Эгерде тик бурчтуктун диагоналы 26 см ге барабар болсо, анын жактарын тапкыла.

31. Аянты 2400 м^2 болгон тик бурчтук формасындагы жер участогу, узундугу 200 м болгон тосмо менен тосулган. Бул участоктун узунун жана туурасын тапкыла.

32. Тик бурчтуу үч бурчтуктун периметри 84 см ге, ал эми анын гипотенузасынын узундугу 37 см ге барабар. Бул үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

33. Бирдей убакытта иштеп эки экскаватор жер казууда иштин кандайдыр бир көлөмүн 3 саат 45 минутада аткарышат. Ар бир экскаватор жалгыздан иштесе, бул иштин көлөмүн биринчиси экинчисине караганда 4 саат эрте бүтөт. Жер казуудагы ошол иштин көлөмүн өз алдынча аткаруу үчүн ар бир экскаваторго канча убакыт керек болот?

34. Бир комбайнер участоктогу буудайдын түшүмүн экинчисине караганда 24 саатка тез жыйнап алат. Эки комбайнер бирге иштешип, түшүмдү жыйноону 35 саатта бүтүшөт. Жалгыздан иштесе, ар бир комбайнерге канча убакыт керек болот?

35. Жолдо иштөөчү бригадалардын бири жолдун кандайдыр бир участогун экинчиге караганда 4 саат тез асфальттай алат. Эгерде бирге иштегенде 24 сааттын ичинде алар мындай участоктон 5ти асфальттай ала тургандыгы белгилүү болсо, ар бир бригада мындай участокту канча саатта асфальттай алат?

36. Цехтин ойлоп табуучулары (рационализаторлору) тетиктин өркүндөтүлгөн тибин иштеп чыгышты да, өндүрүшкө киргизишти. Эгерде жаңы типтеги тетиктин эски типтеги тетиктен 0,2 кг жеңил экендиги, ошону менен бирге 24 кг металлдан эски типтеги тетиктерди жасаганга караганда 22 кг металлдан жаңы типтеги тетиктен экини ашык жасай баштагандыгы белгилүү болсо, анда жаңы жана эски тетиктердин массаларын аныктагыла.

37. Арасындагы аралыгы 18 км ге барабар болгон M пунктунан N пунктуна карай бир убакытта эки турист чыкты. Алардын бири экинчисине караганда N пунктуна 54 мин кеч келди. Эгерде алардын биринин ылдамдыгы экинчисиникине караганда 1 км/саатка аз экендиги белгилүү болсо, ар бир туристтин ылдамдыгын тапкыла.

38. Бири-биринен 50 км алыстыктагы эл жашаган M жана N пункттарынан бир убакытта бирин-бири көздөй эки мотоциклчен чыгып, 30 минутадан кийин кездешкен. Эгерде алардын бири M ге, экинчисинин N ге келгенине караганда 25 мин эрте келгендиги белгилүү болсо, ар бир мотоциклчендин ылдамдыгын тапкыла.

39. Алтын менен күмүштүн эки кошундусу бар. Бул металлдардын катышы биринчи кошундуда 2:3, ал эми экинчисинде 3:7. Алтын менен күмүштүн катышы 5:11 болгон жаңы кошунду алуу үчүн, эки кошундунун ар биринен канчадан алуу керек?

40. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^6-x^4=0$;

б) $x^5=4x^2$;

в) $0,3x^4=6x^2$;

г) $x^3-x^2-4(x-1)^2=0$;

д) $2x^3+2x^2-(x+1)^2=0$;

е) $5x^3-19x^2-38x+40=0$;

ж) $6x^3-31x^2-31x+6=0$.

41. Жаңы өзгөрмөнү киргизүүнү пайдаланып, төмөндөгү теңдемени чыгаргыла:

а) $(x^2+6x)^2-5(x^2+6x)=24$;

б) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-5)=3$;

в) $(x+2)^4-(x+2)^2=12$;

г) $(x^2-x-16)(x^2-x+2)=19$;

д) $(2x^2+7x-8)(2x^2+7x-3)-6=0$;

е) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=25x^2-16$;

ж) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=6x^2-1$;

з) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$;

и) $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$.

42. Төмөндөгү биквадраттык теңдеменин тамырларынын суммасын тапкыла:

а) $x^4-9x^2+18=0$;

б) $x^4+3x^2-10=0$;

в) $4x^4-12x^2+1=0$;

г) $12x^4-x^2-1=0$.

43. а) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ саны $x^4-6x^2+3=0$ биквадраттык теңдемесинин тамыры болуп эсептелеби?

б) $\sqrt{5-\sqrt{2}}$ саны $x^4-10x^2+23=0$ биквадраттык теңдемесинин тамыры болуп эсептелеби?

44. *c* нын кандай маанилеринде төмөндөгү теңдеме тамырга ээ болбойт:

а) $x^4-12x^2+c=0$;

б) $x^4+cx^2+100=0$?

45. *k* нын кандай маанилеринде $x^4-13x^2+k=0$ теңдемеси:

а) төрт тамырга; б) эки тамырга ээ болот?

46. Төмөндөгү үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) x^4-17x^2+16 ;

б) x^4-5x^2-36;

в) x^4-3x^2-4;

г) $4x^4-17x^2+4$.

47. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x|=x+2$; б) $|-x+2|=2x+1$; в) $|x-1|+|x-2|=1$;

г) $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$; д) $|x^2-1|=-|x|+1$.

48. Тендемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; д) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$;

б) $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$; е) $\sqrt{3x^2+5x+8}=\sqrt{3x^2+5x+1}$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$; ж) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$;

г) $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$; з) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}=2$.

49. Тендемени чыгаргыла:

а) $3x^3+5x^2+5x+3=0$; в) $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$;

б) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$; г) $78x^4-133x^3+78x^2-133x+78=0$.

50. Тендемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x+3y=-1, \\ x^2+2xy+y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2+y^2+8x+13y=5, \\ x-y+2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-3y^2-5x-2y=26, \\ x-y=4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y=4, \\ (x-1)(y+1)=2xy+3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y-11=0, \\ 2x+5y-y^2-6=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ (x+1)(y+4)=2xy-1. \end{cases}$

51. m дин кандай маанилеринде

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=m \end{cases}$$

тендемелер системасы: а) бир чыгарылышка; б) эки чыгарылышка ээ болот?

52. Тендемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ xy=-12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ (x-7y)(x+7y)=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+2y^2=228, \\ 3x^2-2y^2=172; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-3)(y-5)=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ x(y+1)=0. \end{cases}$

53. Тендемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2-2xy-3x^2=0, \\ y^2-xy-2x^2=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=6, \\ y^2-3xy=4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2-2y^2=-2, \\ xy+y^2=1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ 2x^2-3xy+2y^2=4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+3y^2=3, \\ 2xy+y^2=1. \end{cases}$

54. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x+xy+y=5, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2y^2+xy=72, \\ x+y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y)=15, \\ x+xy+y=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$

55. Төмөндөгү теңдемелер системасын графиктик жол менен чыгаргыла:

а) $\begin{cases} y+x+x^2=0, \\ x-y=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=2x^2-14; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=9, \\ y=x^2-4x+4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=8, \\ (x+1)^2+y^2=81; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=-x^2+4, \\ y=|x|. \end{cases}$

56. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=\frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy^3+x^3y=-10, \\ x^2y^4+x^4y^2=20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^8=x^4y^4+1, \\ 3y^8=x^4y^4+2. \end{cases}$

57. b нын кандай маанилеринде:

а) $\begin{cases} |x|+4|y|=b, \\ |y|+x^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |y|+x^2=4, \\ x^2+y^2=b; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|+2|y|=1, \\ |y|+x^2=b. \end{cases}$

теңдемелер системасы төрт ар түрдүү чыгарылышка ээ болот?

58. Эгерде ax^2-2x+b квадраттык үч мүчөсүн x^2+ax-1 квадраттык үч мүчөсүнө көбөйтсөк, анда төртүнчү даражадагы көп мүчө алынат, мында x^2 тын жана x тин коэффициенттери тиешелүү түрдө 8ге жана (−2)ге барабар. a менен b ны тапкыла.

59. Эки оң сандын суммасы алардын айырмасынан 5 эсе чоң. Эгерде алардын квадраттарынын айырмасы 180ге барабар экендиги белгилүү болсо, ал сандарды тапкыла.

60. Эки сандын квадраттарынын айырмасы 100гө барабар. Эгерде үч эселенген биринчи сандан эки эселенген экинчи санды кемитсек, анда 30 болот. Ал сандарды тапкыла.

61. Цифраларынын суммасынан 4 эсе чоң жана цифраларынын көбөйтүндүсүнөн 2 эсе чоң болгон эки орундуу санды тапкыла.

62. Эгерде жөнөкөй бөлчөктүн алымын 7ге чоңойтсок, ал эми бөлүмүн квадратка көтөрсөк, анда $\frac{3}{4}$кө барабар болгон бөлчөк алынат. Эгерде алымын өзгөрүүсүз калтырып, бирок бөлүмүн 6га чоңойтсок анда $\frac{1}{2}$ге барабар болгон бөлчөк алынат. Бул бөлчөктү тапкыла.

63. Тик бурчтуктун диагоналы 15 см ге барабар. Эгерде анын жактарынын бирин 6 см ге, ал эми экинчи жагын 8 см ге кичирейтсек, анда периметри 3 эсе азаят. Тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

64. Бассейн экинчи түтүккө караганда биринчи түтүк аркылуу 5 саатка тезирээк толтурулат. Адегенде биринчи түтүктү гана 5 саатка ачып, андан кийин экинчи түтүктү гана 7,5 саатка ачып коюп да бассейнди толтурууга болот. Эки түтүк тең бирдей иштегенде бассейн канча саатта толтурулат?

65. Арасындагы аралыгы 270 км ге барабар болгон эки шаардан бир убакытта бири-бирин карай эки поезд чыгышып, 3 сааттан кийин кезигишти. Поезддердин бири экинчисине караганда бардык жолго 1 саат 21 минута көп убакыт кетирген. Ар бир поезддин ылдамдыгын тапкыла.

66. Арасындагы аралыгы 90 км болгон M жана N пункттарынан бири-бирин карай эки автомобиль чыгышты. Алардын бири N пунктуна жолдон кезигишкенден 1 саат 15 мин өткөндө келди, ал эми экинчиси M ге жолдон кезигишкенден кийин 48 мин өткөндө келди. Автомобилдердин ылдамдыктарын тапкыла.

67. 4 кг жана 6 кг болгон эки эритме, ар бири өзүнчө эки идишке куюлган. Ар бир эритмеде ар түрдүү процентеги кислота бар. Эгерде эки эритмени кошсок, анда 35% кислотасы бар эритмени алабыз. Ал эми ар бир эритмеден 4 кг дан алып кошсок, анда 36% кислотасы бар эритмени алабыз. Ар бир идиште канча килограммдан кислота бар?

III глава

АРИФМЕТИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯЛАР

§ 1. САН УДААЛАШТЫГЫ

$$1, 2, 3, 4, 5, ..., n, n+1, ...$$

натуралдык сандарынын катарын карайлы.

Ар бир натуралдык санга өзүнүн квадраты туура келсин дейли:

$$1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, (n+1)^2, ... \qquad (1)$$

Келип чыккан сандар натуралдык сандардын квадратынын *удаалаштыгын* түзүшөт.

Эми ар бир натуралдык санга өзүнө тескери болгон санды туура келтирсек, дагы бир:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} ... \qquad (2)$$

деген сан удаалаштыгын алабыз.

Эгер, ар бир n натуралдык санга кандайдыр бир a_n чыныгы саны туура келе турган эрежени кабыл алсак, анда

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ... \qquad (3)$$

сан удаалаштыгы *берилди* деп айтабыз.

Ар бир a_n саны *удаалаштыктын мүчөсү*, ал эми n болсо *анын катар номери* деп аталат. (3)дө:

a_1 саны — удаалаштыктын биринчи мүчөсү;
a_2 саны — удаалаштыктын экинчи мүчөсү;
a_5 саны — удаалаштыктын бешинчи мүчөсү;
a_n саны — удаалаштыктын n-мүчөсү;
a_{n+1} саны — удаалаштыктын $(n+1)$-мүчөсү.

Маселен, (2) удаалаштыгынын экинчи мүчөсү $\frac{1}{2}$ге барабар, б.а. $a_2 = \frac{1}{2}$; бул удаалаштыктын жетинчи мүчөсү $\frac{1}{7}$ге барабар, б.а. $a_7 = \frac{1}{7}$; ошол эле сыяктуу удаалаштыктын n-мүчөсү $\frac{1}{n}$ге барабар, б.а. $a_n = \frac{1}{n}$.

Натуралдык сандардын катары да сан удаалаштыгын түзөт. Мында удаалаштыктын биринчи мүчөсү 1, б. а. $a_1=1$, сегизинчи мүчөсү 8, б. а. $a_8=8$, ошондой эле удаалаштыктын $(n-1)$-чи мүчөсү $(n-1)$, б. а. $a_{n-1}=n-1$, ж. б.

Сан удаалаштыгын n-чи мүчөсүнүн формуласы аркылуу туюнтууга болот. Маселен, (1) удаалаштыгын $a_n=n^2$ формуласы аркылуу берүүгө болот. Анда $a_1=1^2=1$, $a_2=2^2=4$, $a_3=3^2=9$ ж. б.

1-маселе. Сан удаалаштыгы $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$ формуласы аркылуу берилген. Бул удаалаштыктын сексенинчи мүчөсүн тапкыла.

$$a_{80}=\frac{80(80-1)}{2}=3160\,.$$

Айрым учурда удаалаштык мурдагы n-мүчөсү аркылуу $n+1$-мүчөсүн эсептеп чыгаруучу формула аркылуу берилет. Бул учурда удаалаштыктын бир же бир топ алгачкы мүчөлөрү берилет. Муну удаалаштыктын *рекурренттик* жол менен берилиши деп аташат.

2-маселе. $a_{n+1}=5a_n-3$ рекурренттик формула жана $a_1=1$ шарты аркылуу берилген удаалаштыктын төртүнчү мүчөсүн тапкыла.

Удаалаштыктын төртүнчү мүчөсүн табыш үчүн мурунку мүчөлөрүн эсептеп чыгабыз:

$$a_2=5a_1-3=5\cdot1-3=2\,,$$
$$a_3=5a_2-3=5\cdot2-3=7\,,$$
$$a_4=5a_3-3=5\cdot7-3=32\,.$$

Жообу: $a_4=32$.

3-маселе. Сан удаалаштыгы $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ рекурренттик формула жана $a_1=2$, $a_2=5$ шарттары аркылуу берилген. Бул удаалаштыктын бешинчи мүчөсүн тапкыла.

$$a_3=a_2+a_1=5+2=7,$$
$$a_4=a_3+a_2=7+5=13,$$
$$a_5=a_4+a_3=13+7=20.$$

Жообу: $a_5=20$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Натуралдык сандардын квадраттарынын удаалаштыгы 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... берилген:

а) удаалаштыктын үчүнчү, алтынчы, n-мүчөсүн тапкыла.

б) 4, 25, n^2, $(n+1)^2$ удаалаштыктын канчанчы мүчөсү болуп эсептелет?

в) $(n+1)^2$ тан кийин удаалаштыктын кайсы мүчөсү келет?

г) бул удаалаштыкта 100 канчанчы номерге туш келет?

д) 48; 169; $\frac{1}{49}$; 441 саны удаалаштыктын мүчөсү болуп эсептелеби? Эгер болсо анын номерин атап бергиле.

2. n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген удаалаштыктын алгачкы үч мүчөсүн тапкыла:

а) $a_n=2n+3$;
б) $a_n=1+3n$;
в) $a_n=100-10n$;
г) $a_n=5n-7$;
д) $a_n=n(n+3)$;
е) $a_n=4^n$;
ж) $a_n=3^{n+1}$;
з) $a_n=5\cdot 2^n$;
и) $a_n=(n+2)(n-3)$.

3. Удаалаштык n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген. Удаалаштыктын алгачкы беш мүчөсүн аныктагыла:

а) $a_n=4n-6$;
б) $a_n=16-5n$;
в) $a_n=2n^2-1$;
г) $a_n=n^3-n^2$;
д) $a_n=\frac{4}{7}n$;
е) $a_n=\frac{n-1}{3}$;
ж) $a_n=n\sqrt{2}$;
з) $a_n=-2^n$;
и) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$;
к) $a_n=0,1^{n-1}$;
л) $a_n=\frac{1}{2^n}$;
м) $a_n=1+\frac{1}{n^2}$;
н) $a_n=1-\frac{2}{n}$;
о) $a_n=(-1)^n$;
п) $a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$.

4. n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген удаалаштыктын онунчу мүчөсүн тапкыла:

а) $a_n=5n-3$;
б) $a_n=4-3n$;
в) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$;
г) $a_n=\frac{n+9}{2n-1}$;
д) $a_n=|n-15|-5$;
е) $a_n=10-|n-20|$.

5. n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген удаалаштыктын $(n+1)$-, $(n-1)$- жана $(n+5)$-мүчөсүн жазгыла:

а) $a_n=5n+4$;
б) $a_n=2(n-10)$;
в) $a_n=2-3^{n-1}$;
г) $a_n=7(\frac{1}{2})^{n+3}$.

6. Удаалаштык $a_{n+1}=(2n-1)a_n$ рекурренттик формула жана $a_1=2$ шарты аркылуу берилген. Удаалаштыктын алгачкы беш мүчөсүн тапкыла.

7. Удаалаштык $a_{n+1}=3a_n-5$ рекурренттик формула жана $a_1=1$ шарты аркылуу берилген. Удаалаштыктын алгачкы төрт мүчөсүн жазгыла.

8. Удаалаштык $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ рекурренттик формула жана $a_1=-1$, $a_2=3$ шарттары аркылуу берилген. Удаалаштыктын бешинчи мүчөсүн эсептегиле.

9. Сан удаалаштыгы $a_{n+2}=a_n^2-a_{n+1}$ рекурренттик формула жана $a_1=2$, $a_2=3$ шарттары аркылуу берилген. Удаалаштыктын бешинчи мүчөсүн эсептегиле.

10. $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ рекурренттик формула жана $a_1=a_2=1$ шарттары аркылуу берилген удаалаштык Фибоначчинин удаалаштыгы деп аталат.

а) Бул удаалаштыктын алгачкы жети мүчөсүн жазгыла.

б) $a_{n+2}^2-a_{n+1}^2=a_n a_{n+3}$ экендигин далилдегиле.

§ 2. АРИФМЕТИКАЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Санаторияда эс алуучуга доктор күнүгө төмөндөгүдөй күнгө какталуу эрежесин: биринчи күнү 10 мин. күнгө какталуу, ал эми ар бир кийинки күндөрү аны улам 5 минутага узартып туруу керектигин сунуш кылды.

Эс алуучу алгачкы он күндүн ар бир күнү канча минутадан күнгө какталып турган?

Бул суроого жооп бериш үчүн күнгө какталуу мөөнөтүнүн маанилеринин удаалаштыгын түзүп чыгабыз:

$$10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ 50,\ 55,\ \ldots$$

Бул удаалаштыкта экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир мүчө мурунку мүчөгө бир эле санды, б.а. 5ти кошконго барабар болгону көрүнүп турат. Мындай удаалаштык арифметикалык прогрессия деп аталат.

Аныктама. **Арифметикалык прогрессия деп экинчи мүчөсүнөн баштап улам кийинки мүчөсү мурункусуна бир эле турактуу санды кошкондон пайда болгон сан удаалаштыгын айтабыз.**

Аныктамадан арифметикалык прогрессиянын ($n+1$)- жана n-чи мүчөсүнүн айырмасы n дин бардык маанилери үчүн бипбирдей сан экендиги келип чыгат. Ал сан *арифметикалык прогрессиянын айырмасы* деп аталат да, d тамгасы аркылуу белгиленет, б.а.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

сан удаалаштыгы, эгер бардык натуралдык n үчүн

$$a_{n+1}=a_n+d$$

шарты аткарылса, анда арифметикалык прогрессия болуп эсептелет, мында d — арифметикалык прогрессиянын айырмасы.

Мисалдар:

1) сандардын натуралдык катары 1, 2, 3, 4, ..., n ... арифметикалык прогрессияны түзүшөт. Бул прогрессиянын айырмасы $d=1$;

2) терс бүтүн сандардын удаалаштыгы $-1, -2, -3, -4, \ldots, n \ldots$ айырмасы $d=-1$ болгон арифметикалык прогрессия болот;

3) бешке бөлүнүүчү натуралдык сандардын удаалаштыгы 5, 10, 15, 20, ..., $5n$ ... айырмасы $d=5$ болгон арифметикалык прогрессия;

4) 3, 3, 3, 3, ..., 3, ... удаалаштыгы $d=0$ болгон арифметикалык прогрессия.

Теорема. **Эгер $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ айырмасы d болгон арифметикалык прогрессия болсо, анда анын n-чи мүчөсү**

$$a_n = a_1 + (n-1)d . \tag{1}$$

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$\begin{gathered} a_2 - a_1 = d, \\ a_3 - a_2 = d, \\ a_4 - a_3 = d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} - a_{n-2} = d, \\ a_n - a_{n-1} = d. \end{gathered}$$

Бул $(n-1)$ барабардыкты кошуп чыгабыз. Барабардыктардын сол жактарындагы a_n жана a_1 ден башка бардык мүчөлөрү өз ара жоюшуп кетет.

Акырында

$$a_n - a_1 = (n-1)d$$

калат. Мындан

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

келип чыгат.

1-маселе. Эгер $a_1=1$ жана $d=4$ болсо, арифметикалык прогрессиянын жыйырманчы мүчөсүн тапкыла.

(1) формуласы боюнча: $a_{20} = 1 + (20-1) \cdot 4 = 77$.

Жообу: $a_{20}=77$.

2-маселе. 6, 10, 14, ... арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

Бул арифметикалык прогрессиянын айырмасы $d=10-6=4$. Демек, $a_1=6$, $d=4$ болгондуктан, (1) формуласы боюнча

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 2 .$$

Жообу: $a_n = 4n + 2$.

3-маселе. 99 саны 3, 5, 7, 9, ... деген арифметикалык прогрессиянын мүчөсү болуп эсептелет. Ошол мүчөнүн номерин тапкыла.

Мейли, издеген номер n болсун. Бизде $a_1=3$ жана $d=2$ болгондуктан, $a_n=a_1+(n-1)d$ формуласы боюнча: $99=3+(n-1)\cdot 2$ болот. Ошондуктан, $99=3+2n-2$, $98=2n$, $n=49$.

Жообу: $n=49$.

4-маселе. Арифметикалык прогрессияда $a_8=130$ жана $a_{12}=166$. n-мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

(1) формуласын пайдаланып төмөндөгүлөрдү табабыз:

$$a_8=a_1+7d,\ a_{12}=a_1+11d.$$

a_8 жана a_{12} нин берилген маанилерин коюп a_1 жана d га карата теңдемелердин системасын алабыз:

$$\begin{cases} a_1+7d=130, \\ a_1+11d=166. \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден биринчини кемитсек

$$4d=36,\ d=9.$$

Демек,

$$a_1=130-7d=130-63=67.$$

Эми прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жазып алабыз:

$$a_n=67+9(n-1)=67+9n-9=58+9n\ .$$

Жообу: $a_n=9n+58$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

11. Эгер:

а) $a_1=2$ жана $d=\frac{1}{2}$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы беш мүчөсүн жазгыла.

б) $a_5=4$ жана $d=-5$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы төрт мүчөсүн жазгыла.

в) $a_7=2\frac{1}{2}$ жана $a_6=27\frac{2}{37}$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын айырмасын жазгыла.

12. (*Оозеки*). Төмөнкү арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсү жана айырмасы эмнеге барабар:

а) 6, 8, 10, ...;

б) 7, 9, 11, ...;

в) 25, 21, 17, ...;

г) -12, -9, -6, ...;

д) 4, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, ...;

е) 1, $1+\sqrt{3}$, $1+2\sqrt{3}$, ...;

ж) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-3$, $\sqrt{2}-6$, ...;

з) 7, 7, 7, ...;

и) $-1{,}7$, $-0{,}9$, $-0{,}1$, ...;

к) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-4$, $\sqrt{3}-8$, ...?

13. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ арифметикалык прогрессиясы берилген.

а) эгер $a_1=2$, $d=3$ болсо, анда a_{15} ти;

б) эгер $a_1=3$, $d=4$ болсо, анда a_{20} ны;

в) эгер $a_1=-3$, $d=-2$ болсо, анда a_{18} ди;

г) эгер $a_1=-2$, $d=-4$ болсо, анда a_{11} ди;

д) эгер $a_1=6$, $d=\frac{1}{2}$ болсо, анда a_5 ти;

е) эгер $a_1=-3\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{3}$ болсо, анда a_7 ни эсептегиле.

14. Эгер:

а) $a_1=7$, $a_{16}=67$;

б) $a_1=-3$, $a_{25}=45$;

в) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_7=6{,}5$;

г) $a_1=-4$, $a_9=0$;

д) $a_3=25$, $a_8=35$;

е) $a_3=12$, $a_7=-4$

болсо, анда арифметикалык прогрессиянын айырмасын тапкыла.

15. n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген арифметикалык прогрессиянын алгачкы үч мүчөсүн жазгыла:

а) $a_n=4+3n$;

б) $a_n=12-5n$;

в) $a_n=3(n+1)$.

16. Төмөндөгү арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жазгыла:

а) $1, 6, 11, 16, \ldots$;

б) $25, 21, 17, 13, \ldots$;

в) $-4, -6, -8, -10, \ldots$;

г) $1, -4, -9, -14, \ldots$;

д) $5, 5\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}, \ldots$;

е) $2, 1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 1, \ldots$;

ж) $3a^2, 5a^2, 7a^2, \ldots$;

з) $b+2, b+1, b, \ldots$;

и) $1+\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, 1+5\sqrt{3}, \ldots$;

к) $\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-4, \sqrt{5}-6, \ldots$.

17. Эгер:

а) $a_3=13$, $a_6=22$;

б) $a_4=13$, $a_7=1$;

в) $a_2=-7$, $a_7=18$;

г) $a_3=-32$, $a_5=-44$

болсо, анда арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

18. -22 саны $44, 38, 32, \ldots$ арифметикалык прогрессиянын мүчөсү болуп эсептелет. Ошол мүчөнүн номерин тапкыла.

19. 12 саны $-18, -15, -12, \ldots$ арифметикалык прогрессиянын мүчөсү болуп эсептеле алабы?

20. Эгер: а) $a_n=60$, $a_2=11$, $a_4=25$; б) $a_n=-50$, $a_5=20$, $a_8=-1$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсү a_n дин номерин тапкыла.

21. Удаалаштык $a_n=3-4n$ формуласы аркылуу берилген. Бул арифметикалык прогрессия экендигин далилдегиле. a_n, d жана a_{100} дү тапкыла.

22. 4, 7, 10, ... жана 5, 9, 13, ... арифметикалык прогрессияларынын алгачкы жыйырманчы мүчөлөрүнүн ичинде канча бирдей мүчөлөрү бар?

23. Эркин түшүп келаткан нерсе биринчи секундасында 4,9 м, ал эми калган кийинки секундаларында биринчиге караганда 9,8 м ге ашык түшөт. Түшүп келаткан нерсе 5 секунданын ичинде канча аралыкка жылган болот?

24. Эс алуучу доктордун кеңеши боюнча үчүнчү (шаршемби) күнү күнгө 5 минута (биринчи жолу) какталды жана ар бир күнү күнгө какталуу убактысы улам 5 минутага созулуп турду. Жуманын кайсы күнүндө анын күнгө какталуу убактысы 40 минута болот?

25. Аба ваннасынын курсу биринчи күнү 15 мин. созулуп башталат жана бул процедуранын убактысы ар бир кийинки күн сайын 10 мин. узарып турат. Анын эң акыркы 1 саат 45 мин. убактысына жетиш үчүн көрсөтүлгөн эреженин негизинде аба ваннасын канча күн кабыл алуу керек? ($t \geq 20^\circ$С болсо, жылуу ванна деп эсептелинет).

§ 3. АРИФМЕТИКАЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН КАСИЕТТЕРИ

1-теорема. **Арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсү аны менен коңшулаш эки мүчөсүнүн арифметикалык орто маанисине барабар, б.а.**

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \text{ мында } n>1.$$

Далилдөө. Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}.$$

Мындан $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$. Демек,

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

1-маселе. Эгер $a_{13}=61$, $a_{15}=71$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын он төртүнчү мүчөсүн тапкыла.

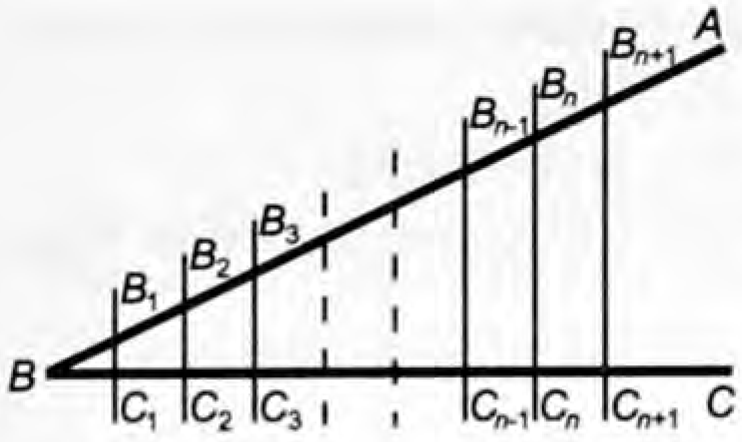
1-теорема боюнча

$$a_{14} = \frac{a_{13}+a_{15}}{2} = \frac{61+71}{2} = 66.$$

Жообу: $a_{14}=66$.

1-теоремага тескери теорема да орун алат.

2-теорема. **Эгер удаалаштыктын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсү анын коңшулаш эки мүчөсүнүн арифметикалык орто маанисине барабар болсо, анда ал удаалаштык арифметикалык прогрессия болуп эсептелет.**



31-сүрөт.

Далилдөө. Мейли

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n, \dots$$

удаалаштыгында каалаган $n>1$ үчүн $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ болсун дейли. Анда $2a_n = a_{n-1}+a_{n+1}$, мындан

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Удаалаштыктын ар бир кийинки мүчөсүн андан мурда турган мүчөсүнөн кемиткендеги айырма бирдей болгондуктан, бул прогрессия — арифметикалык прогрессия.

1- жана 2-теоремадан a, b жана c сандары качан $b = \frac{a+c}{2}$ болгондо гана арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү боло алышары келип чыгат.

2-маселе. ABC бурчунун BC жагына, анын чокусунан тартып бирдей кесиндилер ченелип коюлган. Алардын учтарынан жарыш түз сызыктар жүргүзүлгөн (31-сүрөт). Учтары бурчтун жактарында жаткан бул кесиндилердин узундуктары арифметикалык прогрессияны түзө тургандыгын далилдегиле.

Бул удаалаштыктын $B_{n-1}C_{n-1}$, B_nC_n, $B_{n+1}C_{n+1}$, деген удаалаш үч мүчөсүн карайбыз. $C_{n-1}B_{n-1}B_{n+1}C_{n+1}$ трапециясында B_nC_n кесиндиси анын орто сызыгы. Ошондуктан,

$$B_nC_n = \frac{B_{n-1}C_{n-1}+B_{n+1}C_{n+1}}{2}.$$

Демек, 2-теореманын негизинде бул кесиндилердин узундуктарынын удаалаштыгы арифметикалык прогрессия болуп эсептелет.

1- жана 2-теоремалар өз ара тескери теоремалар. Аларды бир теоремага бириктирсе болот. Бул учурда теореманын айтылышында «качан жана качан гана», «ошол жана ошол учурда гана», «зарыл жана жетиштүү» деген сөздөр пайдаланылат.

1- жана 2-теоремаларды бириктирген теореманы келтирели.

a, b жана c үч сан качан гана b саны a жана c сандарынын арифметикалык орто мааниси, б.а. $b = \frac{a+c}{2}$ болгондо гана арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү боло алышат. Бул касиет арифметикалык прогрессиянын аталышын бышыктайт.

3-маселе. 4 жана 28 сандарынын арасына бул берилген сандар менен кошо арифметикалык прогрессия удаалаш беш мүчөдөн тура турган үч санды коюп чыккыла.

Маселенин шарты боюнча a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү, бирок $a_1=4$, $a_5=28$. $a_n=a_1+$ $+(n-1)d$ формуласы жана берилген $a_1=4$ жана $a_5=28$ маанилери боюнча прогрессиянын айырмасы d ны табабыз: $28=4+4d$, мындан $4d=24$, $d=6$, демек

$$a_2=4+6=10,\quad a_3=10+6=16,\ a_4=16+6=22.$$

Ошентип, прогрессия 4, 10, 16, 22, 28 деген удаалаш беш мүчөдөн турарын аныктадык.

КӨНҮГҮҮЛӨР

26. Эгер: а) $a_1=5$, $a_2=15$; б) $a_3=8$, $a_5=2$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы беш мүчөсүн тапкыла.

27. Эгер: а) $a_8=126$, $a_{10}=146$; б) $a_8=-64$, $a_{10}=-50$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын төртүнчү мүчөсүн жана айырмасын тапкыла.

28. Эгер: а) $a_{18}=28$, $a_{20}=38$; б) $a_8=-6$, $a_{20}=6$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын он тогузунчу жана биринчи мүчөсүн тапкыла.

29. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын градустук чени прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү болуп эсептелет. Бул мүчөлөрдүн ортоңкусун тапкыла.

30. -5 жана 1 сандарынын арасына арифметикалык прогрессиянын удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

31. -5 жана 1 сандарынын арасына арифметикалык прогрессиянын удаалаш беш мүчөсү келип чыга тургандай үч санды коюп чыккыла.

32. -5 жана 1 сандарынын арасына арифметикалык прогрессиянын удаалаш алты мүчөсү келип чыга тургандай төрт санды коюп чыккыла.

33. a жана b сандарынын арасына арифметикалык прогрессиянын удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

34. $a_n+a_k=a_{n-i}+a_{k+i}$ экендигин далилдегиле, мында a_n, a_k, a_{n-i}, a_{k+i} арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү.

35. $a_n=\frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}$ экендигин далилдегиле, мында a_n, a_{n-k}, a_{n+k} арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү.

36. Арифметикалык прогрессияда $a_{10}=25$, $a_{30}=95$ болсо, анда a_{20} ны тапкыла.

37. Арифметикалык прогрессияда $a_2+a_4=7$, $a_6-a_8=23$ болсо, анда a_3+a_7 ни тапкыла.

§ 4. АРИФМЕТИКАЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН АЛГАЧКЫ *n* МҮЧӨСҮНҮН СУММАСЫ

1-маселе. Натуралдык сандардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы $S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ ди тапкыла.

Бул сумманы төмөнкүдөй эки түрдө жазып алабыз:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n\ ,$$

$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1\ .$$

Бул барабардыктарды мүчөлөп кошуп чыксак,

$$2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ кошулуучу}}$$

ге ээ болобуз. Демек,

$$2S_n = n(n+1)\ ,$$

мындан

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Мисалы, алгачкы 1000 натуралдык сандардын суммасы

$$S_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2} = 500500\ .$$

Эми каалаган a_1, a_2, ..., a_n, ... арифметикалык прогрессиясын карайлы. Мейли, S_n бул прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы дейли. Анда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n\ .$$

Теорема. **Арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы**

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\ . \qquad (1)$$

Далилдөө. S_n ди эки түрлүү жол менен жазып алалы:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n\ , \qquad (2)$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1\ . \qquad (3)$$

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча анын ар бир мүчөсү андан мурункусуна d санын кошкондон келип чыгат. Ошондуктан, (2) суммасын төмөнкүчө жазып алсак болот:

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-1)d)\ . \qquad (4)$$

Ушундай эле прогрессиянын ар бир мүчөсүн андан кийинкисинен d санын кемиткенге барабар экендиги белгилүү.

Ошондуктан, (3) суммасын мындайча жазып алабыз:

$$S_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + (a_n-(n-1)d)\ . \qquad (5)$$

Келип чыккан (4) жана (5) барабардыктарын кошсок:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)}_{n \text{ кошулуучу}}.$$

Демек,

$$2S_n=(a_1+a_n)n,$$

мындан

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n.$$

1-маселе. Жуп натуралдык сандардын удаалаштыгынын алгачкы жүз мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Жуп натуралдык сандардын удаалаштыгы

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ 2n,\ \ldots$$

айырмасы $d=2$ болгон арифметикалык прогрессия. $a_n=2n$ болгондуктан, $a_1=2$, $a_{100}=200$. $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ формуласы боюнча

$$S_{100}=\frac{2+200}{2}\cdot 100=10100.$$

Жообу: $S_{100}=10100$.

Прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын биринчи мүчөсү жана прогрессиянын айырмасы d аркылуу туюнтууга болот. (1) формуласына $a_n=a_1+(n-1)d$ ны коюп

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n \tag{6}$$

ди алууга болот.

2-маселе. 10, 13, 16, ... арифметикалык прогрессиянын алгачкы 15 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

$$a_1=10,\ d=3,\ n=15.$$

$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$ формуласы боюнча

$$S_{15}=\frac{2\cdot 10+(15-1)\cdot 3}{2}\cdot 15=465.$$

Жообу: $S_{15}=465$.

3-маселе. Эгер кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болуп эсептелсе, $38+35+32+\ldots+(-7)$ суммасын тапкыла.

$$a_1=38,\ d=-3,\ a_n=-7.$$

n-мүчөсүнүн формуласы $a_n=a_1+(n-1)d$ боюнча кошулуучуларынын санын табабыз:

$$-7=38+(n-1)(-3),\quad -7=38-3n+3,\ 3n=48,\ n=16.$$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ формуласы боюнча $S_{16}=\frac{38-7}{2}\cdot 16=248$.

Жообу: $S_{16}=248$.

4 - маселе. 1ден баштап суммасы 153кө барабар болгудай кылып удаалаш натуралдык сандардын канчасын алыш керек?

Натуралдык сандардын катары — айырмасы $d=1$ болгон арифметикалык прогрессия. Шарт боюнча

$$a_1=1,\ S_n=153.$$

$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$ формуласын пайдаланып n ге карата

$$153=\frac{2\cdot1+(n-1)\cdot1}{2}n$$

теңдемесин алабыз, мындан

$$306=2n+(n-1)n.$$

Бул теңдемени өзгөртүп түзсөк:

$$n^2+n-306=0.$$

Чыгарып келип, бул теңдемеден төмөнкүлөрдү табабыз:

$$n_1=\frac{-1\pm\sqrt{1+1224}}{2}=\frac{-1\pm35}{2},$$

$$n_1=-18,\ n_2=17.$$

Кошулуучулардын саны терс болушу мүмкүн эмес, ошондуктан $n=17$.

Жообу: $n=17$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

38. Эгер:

а) $a_1=1,\ a_n=20,\ n=50$;
б) $a_1=1,\ a_n=200,\ n=100$;
в) $a_1=-1,\ a_n=-40,\ n=20$;
г) $a_1=2,\ a_n=100,\ n=50$;
д) $a_1=-2,\ a_n=-60,\ n=10$;
е) $a_1=\frac{1}{2},\ a_n=25\frac{1}{n},\ n=11$;
ж) $a_1=1+\sqrt{2},\ a_n=1-11\sqrt{2},\ n=10$;
з) $a_1=\sqrt{3},\ a_n=10+9\sqrt{3},\ n=5$;
и) $a_1=b-2c,\ a_n=6b+4c,\ n=6$;
к) $a_1=b+c,\ a_n=3b-c,\ n=7$

болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

39. 2ден 300кө чейинки бардык жуп сандардын суммасын тапкыла.

40. 1ден 133кө чейинки бардык так сандардын суммасын тапкыла.

41. 34төн 70ке чейинки бардык эки орундуу сандардын суммасын тапкыла.

42. 139дан 150ге чейинки бардык үч орундуу сандардын суммасын тапкыла.

43. a, $2a$, $3a$, ... арифметикалык прогрессиянын алгачкы 16 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

44. b^2, $3b^2$, $5b^2$, ... арифметикалык прогрессиянын алгачкы 12 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

45. Эгер:

а) $n=11$ болсо, 9, 13, 17, ...; д) $n=20$ болсо, 36, 33, 30, ...;

б) $n=22$ болсо, 25, 30, 35, ...; е) $n=15$ болсо, $\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \dots$;

в) $n=12$ болсо, -16, -10, -4, ...; ж) $n=10$ болсо, $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, \dots$;

г) $n=13$ болсо, -3, 4, 11, ...; з) $n=16$ болсо, 27, 25, 23, ...

арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

46. Эгер кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болуп эсептелсе, сандардын төмөнкүдөй суммаларын тапкыла:

а) $3+6+9+...+273$; д) $-38+(-33)+(-28)+...+12$;

б) $4+8+12+...+308$; е) $-17+(-14)+(-11)+...+13$;

в) $90+80+70+...+(-60)$; ж) $\frac{5}{3}+\frac{9}{3}+\frac{13}{3}+\dots+\frac{53}{3}$;

г) $36+34+32+...+(-4)$; з) $\frac{1}{5}+0-\frac{1}{5}-\dots-\frac{14}{5}$.

47. Арифметикалык прогрессия n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген. Эгер:

а) $a_n=3n+5$; б) $a_n=7+3n$ болсо, S_{50} нү тапкыла.

48. Арифметикалык прогрессияда $a_3+a_9=8$. S_{11} ди тапкыла.

49. Эгер:

а) $S_5=65$, $S_{10}=230$; б) $S_1=32$, $S_6=60$

болсо, арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тапкыла.

50. Арифметикалык прогрессияда:

а) $a_1=10$, $n=14$, $S_{14}=1050$; б) $a_1=2\frac{1}{3}$, $n=10$, $S_{16}=90\frac{5}{6}$;

в) $a_1=40$, $n=20$, $S_{20}=-40$; г) $a_1=\frac{1}{3}$, $n=16$, $S_{16}=-10\frac{2}{3}$;

болсо, a_n ди жана d ны тапкыла.

51. Арифметикалык прогрессияда:

а) $a_7=21$, $S_7=105$; б) $a_{11}=92$, $S_{11}=105$;

болсо, a_1 ди жана d ны тапкыла.

52. Курулуш жыгач устундарын сактаганда 32-сүрөттөгүдөй жыйышат. Эгер анын алдына 12 устун коюлса, бир үймөккө канча устун жыйылат.

53. Цирктин секторлорунун биринде көрүүчүлөр үчүн креслолор ар бир кийинки катарда алдыңкысына караганда бирден ашык орунга орнотулган. Эгер биринчи катарда 8 кресло, ал эми бардык катар 22 болсо, сектордо канча кресло орнотулган?

54. Бала кубиктерден жогорку катарында бир, кийинкисинде эки, үчүнчүсүндө үч ж.б. кубик жаткыдай кылып тектирче куруп чыгат.

а) 12 тепкичтен турган тектирчени куруш үчүн ага канча кубик керек?

б) 120 кубиги бар тектирче канча тепкичтен турат?

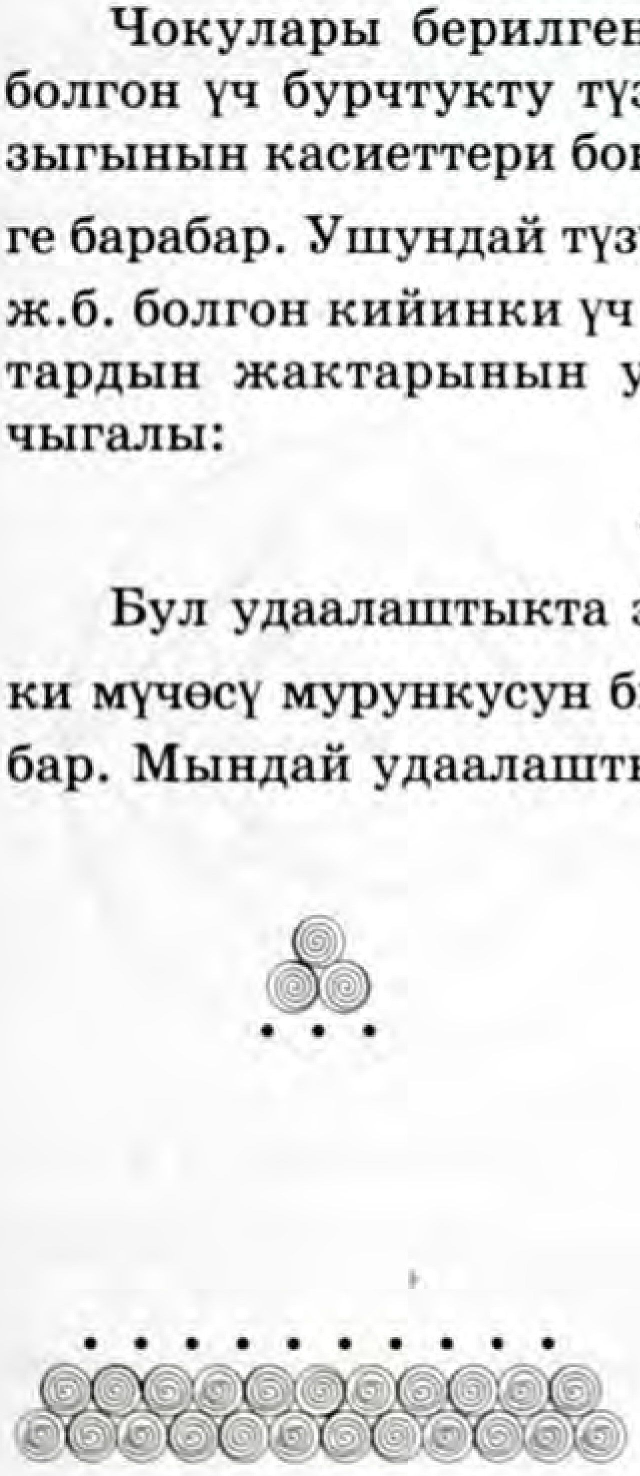
§ 5. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Жактары 4 см болгон тең жактуу үч бурчтукту карайлы.

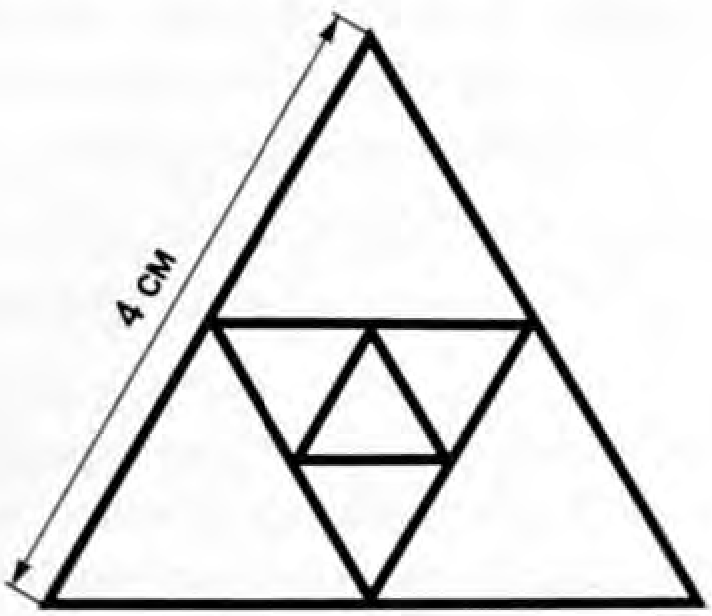
Чокулары берилген үч бурчтуктун жактарынын ортолору болгон үч бурчтукту түзөбүз (33-сүрөт). Үч бурчтуктун орто сызыгынын касиеттери боюнча экинчи үч бурчтуктун жактары 2 см ге барабар. Ушундай түзүүнү кайталай берсек жактары 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см ж.б. болгон кийинки үч бурчтуктарды алабыз. Ушул үч бурчтуктардын жактарынын узундуктарынын удаалаштыгын жазып чыгалы:

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

Бул удаалаштыкта экинчисинен баштап анын ар бир кийинки мүчөсү мурункусун бир эле $\frac{1}{2}$ санына көбөйткөндөгүсүнө барабар. Мындай удаалаштык геометриялык прогрессия деп аталат.



32-сүрөт.



33-сүрөт.

Аныктама. **Геометриялык прогрессия деп биринчи мүчөсү нөлдөн айырмалуу, ал эми экинчи мүчөсүнөн баштап улам кийинки мүчөсү мурункусуна нөлдөн бөлөк бир эле турактуу санды көбөйткөндөн пайда болгон сан удаалаштыгын айтабыз.**

Аныктамадан геометриялык прогрессиянын $(n+1)$-мүчөсүн n-мүчөсүнө бөлгөндөгү тийинди n дин бардык маанилери үчүн бип бирдей эле сан болору келип чыгат. Бул сан *геометриялык прогрессиянын бөлүмү* деп аталат да, q тамгасы менен белгиленет.

Б.а. b_1, b_2, b_3, ..., b_n удаалаштыгы качан гана бардык n натуралдык сандары үчүн $b_{n+1}=b_n \cdot q$ шарты аткарылганда геометриялык прогрессия болуп эсептелет, мында q — геометриялык прогрессиянын бөлүмү.

$b_1 \neq 0$ жана $q \neq 0$ деген шарттарды кабыл алабыз. Ошондуктан геометриялык прогрессиянын бардык мүчөлөрү нөлгө барабар болбойт.

Мисалдар:

1) 2, 8, 32, 128, ... — бул бөлүмү $q=4$ болгон геометриялык прогрессия;

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ — бул бөлүмү $q=\frac{2}{3}$ болгон геометриялык прогрессия;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, −12, 144 — бул бөлүмү $q=-12$ болгон геометриялык прогрессия;

4) 7, 7, 7, 7 ... — бул бөлүмү $q=1$ болгон геометриялык прогрессия;

1-маселе. Айланага ичтен квадрат сызылган, ал эми анын ичине экинчи айлана сызылган. Экинчи айланага ичтен экинчи квадрат, ал эми ага ичтен үчүнчү айлана сызылган, ж.б. (34-сүрөт). Айлананын радиустары геометриялык прогрессияны түзө тургандыгын далилдегиле.

Мейли n-айлананын радиусу r_n болсун, анда $r_{n+1}^2+r_{n+1}^2=r_n^2$, мындан

$$r_{n+1}^2=\frac{1}{2}r_n^2, \text{ б.а. } r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_n .$$

34-сүрөт.

Демек, бул учурда айланалардын радиустарынын удаалаштыгы геометриялык прогрессияны түзөт.

Теорема. **Эгер b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... бөлүмү q болгон геометриялык прогрессия болсо, анда анын n - мүчөсү**

$$b_n=b_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

Далилдөө. Геометриялык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$\left.\begin{array}{l} b_2 = b_1q \\ b_3 = b_2q \\ b_4 = b_3q \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-1} = b_{n-2}q \\ b_n = b_{n-1}q \end{array}\right\}(n-1)\text{ барабардык}.$$

Бул барабардыктарды өз ара көбөйтүп чыксак:

$$b_2b_3b_4\dots b_{n-1}b_n = b_1b_2b_3\dots b_{n-2}b_{n-1}q^{n-1}.$$

Мунун эки жагын тең $b_2b_3b_4\dots b_{n-1} \neq 0$ санына бөлүп

$$b_n = b_1q^{n-1}$$

барабардыгын алабыз.

(1) формуласы, качан $q\neq1$ болгондо $q^0=1$ деген шарт болсо, $n=1$ болгон учурунда да орундалат.

2 -маселе. Эгер $b_1=81$ жана $q=\frac{1}{3}$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын жетинчи мүчөсүн тапкыла.

(1) формуласы боюнча

$$b_7 = 81\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}.$$

Жообу: $b_7 = \frac{1}{9}$.

3 -маселе. 3, 6, 12, 24, ... геометриялык прогрессиянын жалпы мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

Бул геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тапсак:

$$q = \frac{6}{3} = 2,$$

n-мүчөсүнүн формуласын жазып алалы:

$$b_n = b_1q^{n-1}$$

$b_1=3$, $q=2$ болгондуктан

$$b_n = 3\cdot2^{n-1}.$$

Жообу: $b_n = 3\cdot2^{n-1}$.

4 - маселе. Геометриялык прогрессияда $b_6=96$ жана $b_8=384$. Ошол прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана n-мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

$b_n = b_1q^{n-1}$ формуласы боюнча: $b_6 = b_1q^5$, $b_8 = b_1q^7$. b_6 жана b_8 дин маанилерин койсок: $96=b_1q^5$, $384=b_1q^7$ болот. Бул барабардыктардын экинчисин биринчисине бөлсөк:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1q^7}{b_1q^5},$$

мындан

$$4=q^2 \quad \text{же} \quad q^2=4.$$

Акыркы барабардыктан: а) $q_1=2$, б) $q_2=-2$ болорун табабыз.

Прогрессиянын биринчи мүчөсүн табыш үчүн $96=b_1q^5$ барабардыгын пайдаланабыз.

а) $q=2$ болгондо: $96=b_12^5$, $96=b_132$, $b_1=3$ болорун табабыз.

Эгер $b_1=3$ жана $q=2$ болсо, анда n-мүчөсүнүн формуласы

$$b_n=3\cdot 2^{n-1}$$

түрүндө болорун табабыз.

б) $q=-2$ болгондо: $96=b_1(-2)^5$, $96=b_1(-32)$, $b_1=-3$ болорун табабыз.

Эгер $b_1=-3$ жана $q=-2$ болсо, анда n-мүчөсүнүн формуласы

$$b_n=3\cdot(-2)^{n-1}$$

түрүндө болот.

5 - маселе. 486 саны 2, 6, 18, ... деген геометриялык прогрессиянын мүчөсү болуп эсептелет. Ошол мүчөнүн номерин тапкыла.

n изделген номер болсун. $b_1=2$, $q=3$ болгондуктан $b_n=b_1q^{n-1}$ формуласы боюнча

$$486=2\cdot 3^{n-1},\ 243=3^{n-1},\ 3^5=3^{n-1},$$

мындан $n-1=5$, $n=6$.

Жообу: $n=6$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

55. (*Оозеки*).

а) 8, 16, 32, ...;
б) -10, 20, -40, ...;
в) 4, 2, 1, ...;
г) -50, 10, -2, ...;
д) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...;
е) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...;
ж) 3, 2, $\frac{4}{3}$, ...;
з) $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, ...;
и) 5, $-5\sqrt{2}$, 10, ...;
к) -8, 8, -8, ...;
л) 1, 1, 1, ...
м) -9, 27, -81, ...

геометриялык прогрессиясынын биринчи мүчөсү жана бөлүмү эмнеге барабар?

56.

а) 4, 12, 36, ...;
б) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, ...;
в) 4, -1, $\frac{1}{4}$, ...;
г) 3, -4, $\frac{16}{3}$, ...;
д) 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, ...;
е) -2, 4, -8, ...;
ж) 16, 8, 4, ...;
з) $\frac{1}{3}$, 1, 3, ...
и) a^2, a^3, a^4, ...;

к) $b^3, -b^2, b, \ldots$; л) $(m-1), \frac{(m-1)^3}{2}, \frac{(m-1)^5}{4}, \ldots$;

геометриялык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

57. n-мүчөсүнүн формуласы менен берилген

а) $b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$; б) $b_n = 5(\frac{1}{2})^{n-1}$; в) $b_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

прогрессиянын алгачкы үч мүчөсүн жазып чыккыла. Бул прогрессия үчүн b_{n+1}, b_{n+3} тү да жазгыла.

58. $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ геометриялык прогрессиясы берилген:

а) эгер $b_1=3$ жана $q=10$ болсо, анда b_4 тү;

б) эгер $b_1=4$ жана $q=\frac{1}{2}$ болсо, анда b_7 ни;

в) эгер $b_1=1$ жана $q=-2$ болсо, анда b_5 ти;

г) эгер $b_1=-3$ жана $q=-\frac{1}{3}$ болсо, анда b_6 ны;

д) эгер $b_1=4$ жана $q=-1$ болсо, анда b_9 ду;

е) эгер $b_1=1$ жана $q=\sqrt{3}$ болсо, анда b_7 ни эсептеп чыккыла.

59. Эгер:

а) $b_1=2$, $b_5=162$; в) $b_1=3$, $b_4=-81$;

б) $b_1=128$, $b_7=2$; г) $b_1=250$, $b_4=-2$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тапкыла.

60.

а) $6, 12, 24, \ldots, \underline{192}, \ldots$; д) $-1, 2, -4, \ldots, \underline{128}, \ldots$;

б) $8, 16, 32, \ldots, \underline{512}, \ldots$; е) $486, 162, 52, \ldots, \underline{\frac{2}{3}}, \ldots$;

в) $4, 12, 36, \ldots, \underline{324}\ldots$; ж) $3a^2, 3a^3, 3a^4, \ldots, \underline{3a}^{13}, \ldots$;

г) $625, 125, 25, \ldots, \underline{\frac{1}{25}}, \ldots$; з) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots, \underline{16\sqrt{2}}$

геометриялык прогрессиянын алды сызылган мүчөсүнүн номерин тапкыла.

61. 5, 10, 20, ... геометриялык прогрессиясынын 320га барабар болгон мүчөсүнүн номерин тапкыла.

62. Эгер:

а) $b_2=12$, $b_5=324$; д) $b_2=128$, $b_7=4$;

б) $b_4=24$, $b_7=192$; е) $b_3=-27$, $b_6=-1$;

в) $b_2=28$, $b_4=448$; ж) $b_3=3p^6$, $b_{10}=3p^{20}$;

г) $b_2=12$, $b_4=192$; з) $b_3=4p^2$, $b_{10}=512p^9$;

болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн, бөлүмүн жана n-мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

63. Эгер:

а) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; в) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$;

б) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$; г) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын бешинчи мүчөсүн тапкыла.

64. $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$ жана $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$ геометриялык прогрессияларынын алгачкы он мүчөлөрүнүн арасында бирдей болгон канча мүчөлөрү бар?

65. Удаалаштык n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген:

а) $b_n = 3 \cdot 2^n$; в) $b_n = 5^{n-3}$;

б) $b_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{n+1}$; г) $b_n = (-\frac{1}{4})^{n+2}$.

Берилген удаалаштык геометриялык прогрессия экендигин далилдегиле жана анын биринчи мүчөсүн тапкыла.

66. Эгер:

а) $b_2 b_6 = 4$ жана $b_1 b_4 = 32$; в) $b_2 b_5 = -\frac{1}{8}$ жана $b_1 b_4 = -\frac{1}{2}$;

б) $b_1 b_2 = -18$ жана $b_2 b_3 = -72$; г) $b_1 b_3 = 1$ жана $b_2 + b_4 = -\frac{10}{9}$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

67. Тар бурчка ичтен бири-бирин жанып удаалаш сызылган айланалардын радиустары геометриялык прогрессияны түзөрүн далилдегиле.

68. Сактык касса мөөнөттүү акча сактоого жыл сайын 3% тен кошуп турган. Акча сактоочу 1980-жылдын 1-январында сактык кассага 3000 сом салган. Анын салымынын суммасы 1983-жылдын 1-январында канча болгон?

69. Жактары 4 см болгон квадрат берилген. Анын ортолору экинчи квадраттын чокулары болуп эсептелет. Экинчи квадраттын жактарынын ортолору үчүнчү квадраттын чокулары болуп эсептелет ж.б. Бул квадраттардын аянтарынын удаалаштыгы геометриялык прогрессия болуп эсептелээрин далилдегиле. Жетинчи квадраттын аянтын тапкыла.

§ 6. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН КАСИЕТТЕРИ

1-теорема. **Геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсүнүн квадраты аны менен коңшулаш эки мүчөсүнүн көбөйтүндүсүнө барабар, б.а.**

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \text{ мында } n > 1.$$

Далилдөө. Геометриялык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$$b_n = b_{n-1}q, \quad b_{n+1} = b_n q.$$

Биринчи барабардыкты экинчисине бөлсөк

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_{n-1}}{b_n},$$

мындан

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

1 - маселе. Эгер $b_4 = \frac{12}{7}$, $b_6 = \frac{21}{4}$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын оң мааниге ээ болгон бешинчи мүчөсүн тапкыла.

1-теорема боюнча $b_5^2 = b_4 b_6 = \frac{12}{7} \cdot \frac{21}{4} = 9$, мындан $b_5 = 3$.

1-теоремага тескери теорема да орун алат.

2-теорема. **Мүчөлөрү нөлгө барабар эмес удаалаштык берилсин. Эгер удаалаштыктын биринчи мүчөсүнөн башка мүчөсүнүн квадраты коңшу эки мүчөсүнүн көбөйтүндүсүнө барабар болсо, анда ал удаалаштык геометриялык прогрессия болот.**

Далилдөө. Мейли $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ удаалаштыгында, каалаган $n>1$ үчүн, $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ болсун. Анда

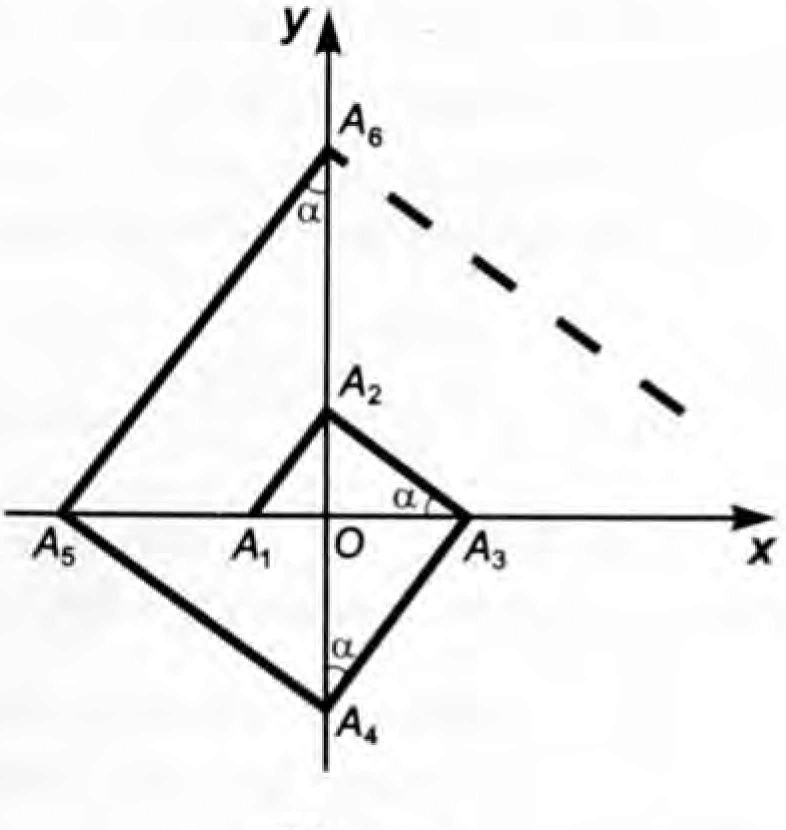
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Удаалаштыктын ар бир мүчөсүн андан мурунку турган мүчөсүнө бөлгөндөгү тийинди бир эле сан болгондуктан, ал удаалаштык геометриялык прогрессия болот.

2 - маселе. $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ чекиттери координата октору нда 35-сүрөттө көрсөтүлгөндөй жайланышкан. Тар бурчу α болгон $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ үч бурчтуктар тик бурчтуу болушат. Координата башталышынан $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ чекиттерине чейинки аралыктар геометриялык прогрессияны түзө тургандыгын далилдегиле.

$A_{n-1}A_nA_{n+1}$ тик бурчтуу үч бурчтугунда тик бурчунун чокусунан гипотенузага түшүрүлгөн бийиктиктин касиети боюнча:

$$OA_n^2 = OA_{n-1} \cdot OA_{n+1}$$



35-сүрөт.

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардык каалаган $n>1$ үчүн аткарылгандыктан 2 теорема боюнча

$$OA_1,\ OA_2,\ OA_3,\ \ldots,\ OA_n$$

аралыктары геометриялык прогрессияны түзүшөт.

Эскертүү. 1 жана 2 теоремалардан a, b, c үч оң сан качан b саны a жана c сандарынын геометриялык орточосу, б.а. $b=\sqrt{ac}$ болгондо гана геометриялык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болуп эсептеле алышары келип чыгат. Бул касиет геометриялык прогрессиянын аталышын түшүндүрөт.

3 маселе. $\sqrt{6}$ жана $3\sqrt{6}$ сандарынын ортосуна алар геометриялык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү келип чыга турган оң санды коюп чыккыла.

Геометриялык прогрессиянын касиети боюнча издеген сан

$$\sqrt{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}}=\sqrt{3\cdot 6}=3\sqrt{2}$$

ге барабар.

Жообу: $\sqrt{6},\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{6}\ (q=\sqrt{3})$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

70. Эгер: а) $b_1=\frac{1}{3},\ b_3=27$; б) $b_2=\frac{1}{2},\ b_4=\frac{9}{32}$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын оң мааниге ээ болгон алгачкы беш мүчөсүн жазгыла.

71. Эгер: а) $b_6=\frac{1}{9},\ b_8=81$; б) $b_6=9,\ b_8=3$ болсо, анда мүчөлөрү оң мааниге ээ болгон геометриялык прогрессиянын жетинчи мүчөсүн жана бөлүмүн жазгыла.

72. Эгер: а) $b_4=5$, $b_6=20$; б) $b_4=9$, $b_6=4$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын бешинчи жана биринчи мүчөсүн жазгыла.

73. Эгер берилген үч сан геометриялык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү болуп эсептелсе, анда белгисиз x санын жазгыла.

а) $\frac{1}{2},\ x,\ 32$; в) $-7,\ x,\ -28$; д) $2,\ x,\ 16$;

б) $\frac{1}{3},\ x,\ \frac{1}{48}$; г) $-6,\ x,\ -54$; е) $-1,\ x,\ -1$.

74. Эгер $b_2=2$, $b_4=18$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын жетинчи мүчөсүн жазгыла.

75. $\frac{1}{2}$ жана 32 сандарынын ортосуна геометриялык прогрессия удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

76. $\frac{1}{2}$ жана 32 сандарынын ортосуна геометриялык прогрессия удаалаш беш мүчөсү келип чыга тургандай үч санды коюп чыккыла.

77. b жана c сандарынын ортосуна геометриялык прогрессия удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

78. Кандай шартта a, b жана c үч оң сан бир эле учурда арифметикалык жана геометриялык прогрессиялардын биринчи, экинчи жана үчүнчү мүчөлөрү боло алышат?

79. $b_n^2 = b_{n+k} \cdot b_{n-k}$ экендигин далилдегиле, мында b_n, b_{n+k}, b_{n-k} геометриялык прогрессиянын мүчөлөрү.

80. $b_n \cdot b_k = b_{n+l} \cdot b_{k-l}$ экендигин далилдегиле, мында b_n, b_k, b_{n+l}, b_{k-l} геометриялык прогрессиянын мүчөлөрү.

81. Геометриялык прогрессияда:

а) $b_3=6$, $b_{11}=486$, b_7 ни; б) $b_3b_5=72$, b_1b_7 ни тапкыла.

§ 7. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН АЛГАЧКЫ *n* МҮЧӨСҮНҮН СУММАСЫ

1-маселе. Радиактивдүү зат ажыраган кезде ар бир 5 күндө массасынын жарымын жоготот. 256 *г* радиактивдүү заттын массасы 30 күндө канчага азаят?

Радиактивдүү заттын массасы ар бир 5 күн сайын эки эсе азайып тургандыктан, массанын ажыроо учурунда жоготкон мааниси бөлүмү $\frac{1}{2}$ болгон геометриялык прогрессияны түзөт, б. а.

$$256 \cdot \frac{1}{2},\ 256 \cdot \frac{1}{2^2},\ 256 \cdot \frac{1}{2^3},\ \ldots .$$

Маселеде төмөнкү сумманы табуу талап кылынган:

$$S=256 \cdot \frac{1}{2}+256 \cdot \frac{1}{2^2}+\ldots+256 \cdot \frac{1}{2^5}+256 \cdot \frac{1}{2^6}. \qquad (1)$$

(1) барабардыгынын эки жагын тең прогрессиянын бөлүмүнө көбөйтсөк

$$\frac{1}{2}S=256 \cdot \frac{1}{2^2}+256 \cdot \frac{1}{2^3}+\ldots+256 \cdot \frac{1}{2^6}+256 \cdot \frac{1}{2^7}. \qquad (2)$$

(1) барабардыгынан (2) барабардыгын кемитсек:

$$S-\frac{1}{2}S=256 \cdot \frac{1}{2}-256 \cdot \frac{1}{2^7}$$

келип чыгат, мындан

$$S=256-4=252\ (г).$$

Жообу: $S=252$ *г*.

Бөлүмү $q \neq 1$ болгон каалагандай

$$b_1,\ b_1q,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots$$

геометриялык прогрессиясын карайбыз. S_n — бул прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы. Анда

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}.$$

Теорема. **Бөлүмү $q \neq 1$ болгон геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы**

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{3}$$

Далилдөө.

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} \tag{4}$$

барабардыгынын эки жагын тең прогрессиянын бөлүмү q га көбөйтсөк,

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n \tag{5}$$

барабардыгын алабыз. (4) барабардыгынан (5) барабардыгын кемитсек,

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n$$

келип чыгат, мындан

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Эгер $q=1$ болсо, анда

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ кошулуучу}} = b_1n$$

болорун байкайбыз.

2-маселе. 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... геометриялык прогрессиясынын алгачкы беш мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Бул прогрессияда $b_1=6$, $q=\frac{1}{3}$ болгондуктан, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласы боюнча

$$S_5 = \frac{6\left(1-(\frac{1}{3})^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = \frac{242}{27}.$$

Жообу: $S_5 = \frac{242}{27}$.

Прогрессиянын бөлүмү $q>1$ болгон учурда S_n ди эсептеп чыгуу үчүн (3) формуласын төмөнкү (6) формуласы түрүндө колдонуу ыңгайлуу

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}. \tag{6}$$

3-маселе. $1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$ суммасын тапкыла.

Берилген сумма геометриялык прогрессиянын алгачкы сегиз мүчөсүнүн суммасы болуп эсептелет, мында $b_1=1$, $q=3$.

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

формуласы боюнча

$$S_8=\frac{1\cdot(3^8-1)}{3-1}=\frac{6561-1}{2}=3280\,.$$

Жообу: $S_8=3280$.

Эскертүү. (6) формуласын төмөндөгүдөй өзгөртүп алууга болот:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1q^n-b_1}{q-1}=\frac{b_1q^{n-1}\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}\,.$$

Демек, геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$$

формуласы аркылуу да эсептеп алууга болот.

4-маселе. 5, 15, 45, ..., 1215, ... удаалаштыгы геометриялык прогрессия. 5+15+45+...+1215 суммасын тапкыла.

Бул прогрессияда $b_1=5$, $q=3$, $b_n=1215$. Анда $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$ формуласы боюнча

$$S_n=\frac{1215\cdot3-5}{3-1}=\frac{3645-5}{2}=1820\,.$$

Жообу: $S_n=1820$.

5-маселе. Геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы -93кө барабар. Бул прогрессиянын биринчи мүчөсү -3, ал эми бөлүмү q болсо 2ге барабар. n ди тапкыла.

$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ формуласын пайдаланабыз.

$$-93=\frac{-3(2^n-1)}{2-1}=-3(2^n-1),\ 31=2^n-1,\ 32=2^n,\ 2^5=2^n,\ n=5\,.$$

Жообу: $n=5$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

82. Эгер:

а) $b_1=\frac{1}{2},\ q=4,\ n=8$;

б) $b_1=2,\ q=\frac{1}{2},\ n=10$;

в) $b_1=1,\ q=\frac{1}{3},\ n=6$;

г) $b_1=-4,\ q=1,\ n=100$;

д) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=-4$, $n=5$; ж) $b_1=10$, $q=-\frac{1}{5}$, $n=6$;

е) $b_1=2$, $q=-\frac{1}{2}$, $n=10$; з) $b_1=5$, $q=-1$, $n=9$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

83. а) 5, 10, 20, ..., $n=7$; д) 128, 64, 32, ..., $n=6$;

б) 2, 6, 18, ..., $n=5$; е) 162, 54, 18, ..., $n=5$;

в) $\frac{3}{5}$, 3, 15, ..., $n=4$; ж) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, ..., $n=5$;

г) $-\frac{2}{3}$, 2, -6, ..., $n=4$; з) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $n=4$

геометриялык прогрессиясынын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

84. Эгер кошулуучулары геометриялык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болуп эсептелсе, анда төмөнкү суммаларды тапкыла:

а) $1+2+4+...+128$; д) $243+81+27+\cdots+\frac{1}{27}$;

б) $1+3+9+...+243$; е) $350+35+3{,}5+...+0{,}0035$;

в) $-1+2-4+...+128$; ж) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{512}$;

г) $5-15+45-...+405$; з) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{2187}$

85. Геометриялык прогрессия берилген. Эгер:

а) $b_2=15$, $b_3=75$; б) $b_2=14$, $b_4=686$, $q>0$

болсо, анда b_5 жана S_4 тү тапкыла.

86. b_1, b_2, b_3 ... геометриялык прогрессиясы берилген. Эгер:

а) $q=2$, $n=7$, $S_n=635$ болсо, анда b_1 жана b_7 ни;

б) $q=-2$, $n=8$, $S_n=85$ болсо, анда b_1 жана b_8 ти;

в) $b_1=7$, $q=3$, $S_n=847$ болсо, анда n жана b_n ди;

г) $b_1=8$, $q=2$, $S_n=4088$ болсо, анда n жана b_n ди;

д) $b_1=2$, $b_n=1458$, $S_n=2186$ болсо, анда n жана q ну;

е) $b_1=1$, $b_n=2401$, $S_n=2801$ болсо, анда n жана q ну;

ж) $b_3=135$, $n=3$, $S_3=195$ болсо, анда b_1 жана q ну;

з) $b_3=8$, $n=3$, $S_3=14$ болсо, анда b_1 жана q ну;

и) $b_1=12$, $n=3$, $S_3=372$ болсо, анда q жана b_3 тү;

к) $b_1=15$, $n=3$, $S_3=105$ болсо, анда q жана b_3 тү тапкыла.

87. Геометриялык прогрессия n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген.

а) $b_n=3\cdot2^{n-1}$, S_5 ти; б) $b_n=-2(\frac{1}{n})^n$, S_6 ны тапкыла.

88. Геометриялык прогрессия берилген. Эгер:

а) $b_1=1$ жана $b_3+b_9=90$ болсо, анда q ну тапкыла;

б) $b_1=3$ жана $b_7-b_4=168$ болсо, анда q ну тапкыла;

в) $b_1-b_3=15$ жана $b_2-b_4=30$ болсо, анда S_{10} ду тапкыла;

г) $b_3-b_1=24$ жана $b_5+b_1=624$ болсо, анда S_6 ны тапкыла.

89. $a^n-a^{n-1}b+ a^{n-2}b^2+...+ab^{n-1}+b^n$ ди жөнөкөйлөткүлө.

§ 8. ЧЕКСИЗ КЕМҮҮЧҮ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Бөлүмү q болгон геометриялык прогрессиянын качан $|q|<1$ болгондогу учурун карайбыз:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ \dots\ , \frac{1}{2^{n-1}}, \ \dots\ , (q=\frac{1}{2})$$

$$2, \ -1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ \dots, \ 2(-\frac{1}{2})^{n-1}, \ \dots \ (q=-\frac{1}{2});$$

$$-3, \ -1, \ \frac{1}{9}, \ -\frac{1}{27}, \ \dots, \ (-3)(\frac{1}{3})^{n-1}, \ \dots \ (q=-\frac{1}{2}).$$

n номери өскөн сайын ар бир прогрессиянын мүчөлөрү модулу боюнча нөлгө жакындап улам азая берет. Мындай геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү деп аталат.

Аныктама: **Бөлүмү $|q|<1$ болгон геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия деп аталат.**

Чексиз кемүүчү

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ \dots\ , \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$$

геометриялык прогрессияны карайбыз.

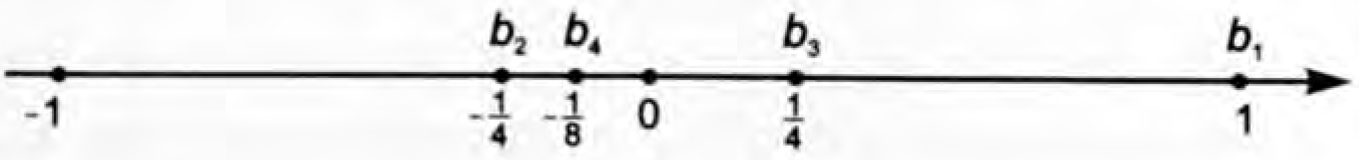
n номери өскөн сайын анын n-мүчөсү $b_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$ барган сайын нөлдөн аз эле айырмаланат (36-сүрөт), маселен:

эгер $n \geq 4$ болсо, анда $|b_n| \leq \frac{1}{16} < 0{,}1$;

эгер $n \geq 7$ болсо, анда $|b_n| \leq \frac{1}{128} < 0{,}01$;

эгер $n \geq 10$ болсо, анда $|b_n| \leq \frac{1}{1024} < 0{,}001$;

n номери улам өскөн сайын чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын мүчөсү b_n модулу боюнча кичирейе берет жана



36-сүрөт.

каалаган оң сандан кичине бойдон калат. Мында b_n *мүчөсү n чексизге жакындаган сайын нөлгө умтулат* деп айтылат жана

$$n \to \infty \text{ да } \quad b_n \to 0$$

деп жазылат (n чексизге умтулганда b_n 0гө умтулат деп окулат).

Бул учурда нөл саны $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ *удаалаштыгынын чеги* деп аталат.

Мына ошентип, эгер геометриялык прогрессиянын бөлүмү q модулу боюнча 1ден кичине болсо, анда ал прогрессиянын n мүчөсү $b_n = bq^{n-1}$, качан $n \to \infty$ да нөлгө умтулат.

1-маселе. n дин кайсы маанисинде $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}$, геометриялык прогрессиясынын мүчөлөрү:

а) 0,01 ден; б) 0,0001 ден кичине?

а) $\frac{1}{10^{n-1}} < 0{,}01 = \frac{1}{10^2}$, мындан $n-1>2$, б.а. $n>3$;

б) $\frac{1}{10^{n-1}} < 0{,}0001 = \frac{1}{10^4}$, мындан $n-1>4$, б.а. $n>5$

болору келип чыгат.

2-маселе. n дин кайсы маанисинде $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^{n-1}}$ геометриялык прогрессиясынын мүчөлөрү 0,03төн кичине?

$\frac{1}{3^{n-1}} < \frac{3}{100}$, мындан $3^n>100$.

$3^4=81<100$, ал эми $3^5=243>100$ болгондуктан $\frac{1}{3^{n-1}} < 0{,}03$ барабарсыздыгы качан $n \geq 5$ болгондо аткарылат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

90. Берилген геометриялык прогрессия:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; в) $-81, -27, -9$; д) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$;

б) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$; г) $-16, -8, -4, \ldots$; е) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \ldots$

чексиз кемүүчү экендигин далилдегиле.

91. Эгер:

а) $b_1 = 40,\ b_{10} = -20$; д) $b_{10} = \frac{1}{9},\ b_9 = \frac{1}{3}$;

б) $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$; е) $b_4 = 0{,}01,\ b_7 = -10$;

в) $b_1 = -30,\ b_6 = 15$; ж) $b_{12} = -\frac{1}{16},\ b_{11} = \frac{1}{8}$;

г) $b_5 = -9,\ b_{10} = \frac{1}{27}$; з) $b_8 = -0{,}04,\ b_{12} = -0{,}64$

болсо, анда геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү боло алабы?

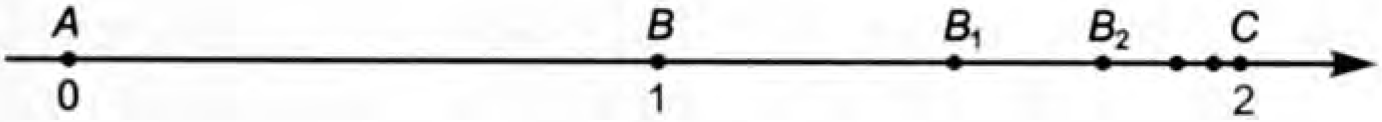
92. Эгер:

а) $1\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, a=-0{,}01$; в) $-9, 3, -1, \ldots, a=0{,}009$;
б) $4, 2, 1, \ldots, a=0{,}004$; г) $4, -2, 1, \ldots, a=0{,}01$

болсо, анда берилген геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнүн модулдары кайсы n номерден баштап оң маанидеги a санынан кичине?

§ 9. ЧЕКСИЗ КЕМҮҮЧҮ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯНЫН СУММАСЫ

1-маселе. Сан огуна узундугу 1 болгон AB кесиндиси ченелип коюлган (37-сүрөт). B чекитинен оңду карай узундугу $\frac{1}{2}$ болгон экинчи BB_1 кесиндиси, ал эми B_1 чекитинен тартып дагы узундугу $\frac{1}{4}$ болгон B_1B_2 кесиндиси ченелип коюлган ж.б., мындайча айтканда кийинки кесиндинин узундугу мурункусунан 2 эсе кыска. Бардык кесиндилердин узундуктарынын суммасын тапкыла.



37-сүрөт.

Кесиндилердин узундуктарынын удаалаштыгы

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияны түзөт.

S_n аркылуу алгачкы n кесиндинин узундуктарынын суммасын белгилесек

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Геометриялык прогрессиянын n-мүчөсүнүн суммасынын формуласы боюнча

$$S_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-(\tfrac{1}{2})^n\right) = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$n \to \infty$ да $\frac{1}{2^{n-1}} \to 0$, ошондуктан $S_n \to 2$.

Мына ошентип, бардык кесиндилердин узундуктарынын суммасы AC кесиндисинин узундугуна барабар экендиги табигый көрүнүш деп эсептөөгө болот.

Маселе чыгарууда геометриялык прогрессиянын чексиз көп мүчөлөрүнүн суммасын табуу талап кылынды.

Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы *деп качан $n\to\infty$ дагы ушул прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы умтулган сан аталат.*

Чексиз кемүүчү b_1, b_1q, b_1q^2, ..., b_1q^{n-1}... геометриялык прогрессиянын суммасынын формуласын чыгарыш үчүн

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n \qquad (1)$$

формуласын пайдаланабыз.

$|q|<1$ болгондуктан n качан ∞ ге умтулганда q^n болсо 0гө умтулат жана ошондуктан $\frac{b_1}{1-q}q^n$ дагы 0гө умтулат.

Демек, n качан ∞ ге умтулганда S_n суммасы $\frac{b_1}{1-q}$ га умтулат.

Мына ошентип, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (2)$$

Айрым алганда, качан b_1=1 болгондо, $S = \frac{1}{1-q}$ болот. Бул барабардык адатта $1+q+q^2+\ldots+q^{n+1} = \frac{1}{1-q}$ деп жазылат.

Бул барабардык бир гана $|q|<1$ болгон учурда туура болорун белгилей кетебиз.

2 - маселе. Чексиз кемүүчү $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, $-\frac{1}{54}$, ... геометриялык прогрессиянын суммасын тапкыла.

$b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$ болгондуктан, $S = \frac{b_1}{1-q}$ формуласы боюнча

$S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{8}$ тү алабыз.

Жообу: $S = \frac{3}{8}$.

3 - маселе. Эгер b_3=−1, $q = \frac{1}{7}$ болсо, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тапкыла.

n=3 болгон учурда b_n=b_1q^{n-1} формуласын пайдаланып b_1 ди табабыз:

$$-1 = b_1(\tfrac{1}{7})^{3-1}, \qquad -1 = b_1\frac{1}{49}, \qquad b_1 = -49.$$

(2) формуласы боюнча S суммасын табабыз:

$$S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}.$$

Жообу: S=$-57\frac{1}{6}$.

4-маселе. Мезгилдүү чексиз $a=0,(15)=0,151515...$ ондук бөлчөгүн жөнөкөй бөлчөк түрүндө жазгыла.

Берилген чексиз бөлчөктүн жакындатылган маанилеринин удаалаштыгын табабыз:

$a_1=0,15$

$a_2=0,1515=0,15+0,0015=0,15+0,15(0,01)$

$a_3=0,151515=0,15+0,0015+0,000015=0,15+0,15(0,01)+0,15(0,01)^2$ ж.б.

Жакындатылып жазылгандар берилген мезгилдүү бөлчөктү биринчи мүчөсү 0,15, ал эми бөлүмү 0,01 болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы түрүндө элестетүүгө боло тургандыгын көрсөтөт.

Ошентип, $b_1=0,15$, $q=0,01$.

$S=\frac{b_1}{1-q}$ формуласы боюнча

$$S=\frac{0,15}{1-0,01}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}.$$

Жообу: $S=\frac{5}{33}$.

5-маселе. Диаметри алгачкы тегеректин радиусуна барабар болгон жаңы тегерек түзүлгөн, дагы диаметри ал экинчи тегеректин радиусуна барабар болгон үчүнчү тегерек түзүлгөн ж.б. (38-сүрөт). Бул тегеректердин аянттары чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия боло тургандыгын көрсөткүлө. Эгер биринчи тегеректин радиусу r болсо, анда ал прогрессиянын суммасын тапкыла.

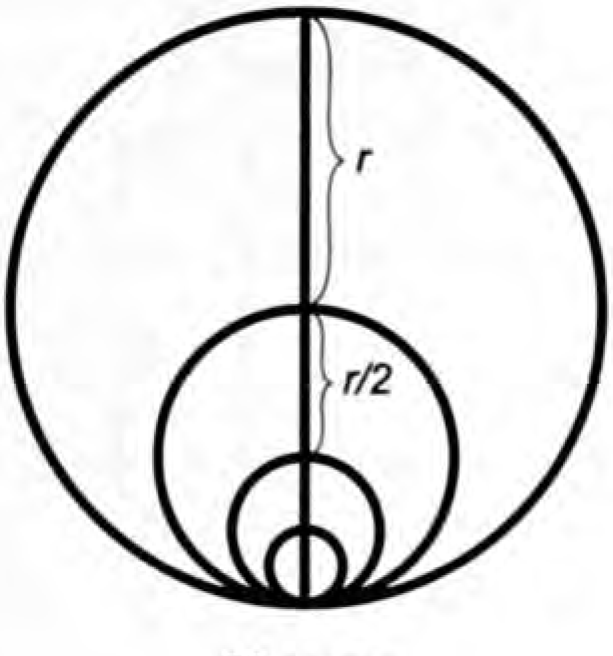
Эгер r биринчи тегеректин радиусу болсо, анда $\frac{r}{2}$ — экинчи, $\frac{r}{4}$ — үчүнчү, $\frac{r}{8}$ — төртүнчү ж.б. тегеректин радиусу. Бул тегеректердин аянттары

$$\pi r^2, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{16}, \frac{\pi r^2}{64}, \dots$$

бөлүмү $q=\frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2}=\frac{1}{4}$ жана $b_1=\pi r^2$ болгон геометриялык прогрессияны түзүшөт. $\left|\frac{1}{4}\right|<1$ болгондуктан, прогрессия чексиз кемүүчү болот. $S=\frac{b_1}{1-q}$ формуласы боюнча

$$S=\frac{\pi r^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\pi r^2}{3}.$$

Жообу: $S=\frac{4\pi r^2}{3}$.



38-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

93. Төмөнкү берилген чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын ар биринин суммасын тапкыла:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots;$ д) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots;$

б) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots;$ е) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots;$

в) $-25, -5, -1, \dots;$ ж) $12, 4, \frac{4}{3}, \dots$

г) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots;$ з) $100, -10, 1.$

94. Эгер:

а) $q=\frac{1}{2},\ b_4=\frac{1}{8};$ г) $q=-\frac{1}{2},\ b_4=-\frac{1}{8};$

б) $q=\frac{1}{3},\ b_3=\frac{1}{9};$ д) $q=\frac{1}{2},\ b_5=\frac{\sqrt{2}}{16};$

в) $q=\frac{1}{3},\ b_5=\frac{1}{81};$ е) $q=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_4=\frac{9}{8}.$

болсо, анда бул ар бир чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тапкыла.

95. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия жалпы мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген. Эгер:

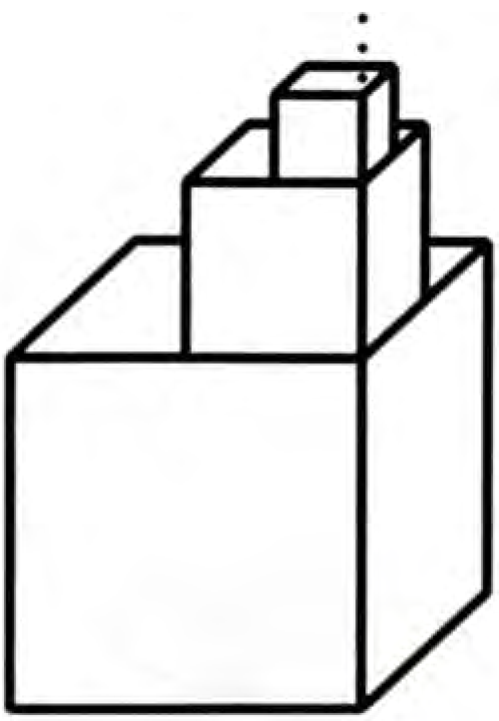
а) $b_n=(\frac{1}{2})^n;$ б) $b_n=(\frac{1}{3})^{n-1};$ в) $b_n=\frac{5}{2^{n-1}};$ г) $b_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$

болсо, анда анын суммасын тапкыла.

96. Эгер:

а) $q=\frac{1}{3};$ б) $q=-\frac{1}{5};$ в) $b_1=75;$ г) $b_1=50$

болсо, анда 150 санын чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиясынын суммасы түрүндө жазгыла.



39-сүрөт.

97. Төмөнкү берилген мезгилдүү чексиз ондук бөлчөктүн ар бирин жөнөкөй бөлчөк түрүндө жазгыла:

а) 0,3333...; д) 0,1212...;
б) 0,5555...; е) 0,2121...;
в) 0,9999...; ж) 0,2333...;
г) 0,1111...; з) 0,4555...

98. Жактары a болгон кубдун үстүнө жактары $\frac{a}{2}$ болгон куб түзүлгөн, ага жактары $\frac{a}{4}$, андан кийин дагы жактары $\frac{a}{8}$ ж.б. кубдар түзүлгөн (39-сүрөт). Келип чыккан фигуранын бийиктигин тапкыла.

§ 10. МАТЕМАТИКАЛЫК ИНДУКЦИЯ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

1 - маселе. Каалаган натуралдык n саны үчүн

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

боло тургандыгын далилдегиле.

1) n=1 үчүн (1) формуласы туура: $1=\frac{1(1+1)}{2}$.

2) Эгер формула (1) натуралдык k саны үчүн туура болсо, анда ал k+1 саны үчүн да туура боло тургандыгын, б.а.

$$1+2+3+...k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{2}$$

формуласынын тууралыгын далилдейли.

(1) барабардыгындагы n дин ордуна k ны коюп, анын эки жагына тең k+1 санын кошолу:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1.$$

Мындан

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)(\frac{k}{2}+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

болгондуктан (2) барабардыгы туура.

Ошентип, эгер $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ формуласы туура болсо, анда $1+2+3+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ формуласы да туура болот.

n=1 болгондо (1) формуласы туура. Демек, далилденген боюнча ал кийинки n=2 натуралдык саны үчүн да туура. (1) формуласы n=2 үчүн да туура болгондуктан, далилденген боюнча ал n=3 үчүн да туура болот ж.б. Мына ошентип формула (1) каалаган натуралдык n саны үчүн туура болот.

Далилдөөдө колдонулган метод *математикалык индукция методу* деп аталат. Бул метод төмөнкүлөрдөн турат.

Мейли, кандайдыр бир формуланын каалагандай натуралдык сан үчүн туура экендигин далилдөө талап кылынсын дейли. Ал үчүн: 1) формуланын n=1 үчүн тууралыгы текшерилет; 2) эгер ал формула натуралдык k саны үчүн туура болсо, анда анын андан кийнки k+1 саны үчүн тууралыгы далилденет.

Анда берилген формула n=2, n=3 жана дегеле каалаган натуралдык n саны үчүн туура болот.

2 - маселе. Бөлүмү q болгон b_1, b_2, ..., b_n, ... геометриялык прогрессиясы берилсин дейли. Математикалык индукция методу аркылуу

$$b_n=b_1q^{n-1} \tag{3}$$

экендигин далилдегиле.

1) n=1 болгондо (3) формуласы туура:

$$b_1 = b_1 q^{1-1}$$

2) Эгер (3) формуласы натуралдык k саны үчүн туура болсо, анда ал k+1 үчүн да туура болорун, б. а.

$b_k = b_1 q^{k-1}$ барабардыгынан

$$b_{k+1} = b_1 q^{(k+1)-1} = b_1 q^k \tag{4}$$

барабардыгынын туура экендиги келип чыгарын далилдейбиз.

Геометриялык прогрессиянын аныктамасы боюнча $b_{k+1} = b_1 q^k$. (3) формуласынан $b_{k+1} = qb_k = qb_1 q^{k-1} = b_1 q^k$ экендиги келип чыгат, б. а. (4) формуласы туура. Демек (3) формуласы далилденди.

3-маселе. $$2^n > n \tag{5}$$
барабарсыздыгы каалаган натуралдык n саны үчүн аткарыла тургандыгын далилдегиле.

$2^1 > 1$ экендигин белгилүү, б. а. (5) барабарсыздыгы n=1 үчүн аткарылат. (5) барабарсыздыгы натуралдык k саны үчүн аткарылсын, б. а. $2^k > k$ барабарсыздыгы туура деп болжойлу. Ушул эле барабарсыздыктан, андан кийинки k+1 натуралдык саны үчүн ушундай эле барабарсыздык, б. а.

$$2^{k+1} > k+1$$

келип чыгарын далилдейли.

Чынында эле. $2^k > k$ болгондуктан,

$$2 \cdot 2^k > 2k \text{ же } 2^{k+1} > k+k .$$

Бирок $2k = k+k \geq k+1$, анткени $k \geq 1$. Демек,

$$2^{k+1} > k+1 .$$

Ошентип, эгер $2^k > k$ барабарсыздыгы туура болсо, анда $2^{k+1} > k+1$ барабарсыздыгы да туура болот.

Демек (5) барабарсыздыгы каалаган натуралдык n саны үчүн аткарылат.

4-маселе. Каалаган натуралдык n саны үчүн

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 \tag{6}$$

барабардыгы аткарыла тургандыгын далилдегиле.

$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ болгондуктан,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{7}$$

барабардыгын далилдөө талап кылынат.

Математикалык индукция методун пайдаланабыз.

1) $n=1$ болгондо (7) формуласы туура: $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

2) Эгер k натуралдык саны үчүн (7) формуласы туура болсо, анда ал $k+1$ үчүн да туура, б. а.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \qquad (8)$$

туура барабардыгынан

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \qquad (9)$$

барабардыгынын туура боло тургандыгы келип чыгарын далилдейли.

(8) барабардыгынын эки жагына тең $(k+1)^3$ санын кошуп төмөнкүнү алабыз:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3.$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+(k+1)\right)=(k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2-(k+2)^2}{4}$$

болгондуктан, (9) формуласы туура. Ошентип, (7) барабардыгы, демек, анда (6) барабардыгы да далилденген болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

99. Математикалык индукция методун пайдаланып: а) арифметикалык прогрессиянын жалпы мүчөсүнүн $a_n=a_1+(n-1)d$ формуласын; б) арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасынын $S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+(n-1)d\right)$ формуласын далилдегиле.

100. Математикалык индукция методу менен төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

б) $3+5+7+\ldots+(2n+1)=n(n+2)$;

в) $4+9+14+\ldots+(5n-1)=\frac{n(5n+3)}{3}$;

г) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

101. Төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$;

б) $3+9+27+\ldots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$;

в) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

III ГЛАВАГА КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

102. 1. Удаалаштыктын жалпы мүчөсүнүн формуласы боюнча анын алгачкы алты мүчөсүн тапкыла:

а) $a_n=\frac{1}{n}$; б) $a_n=-n^2+1$; в) $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$; г) $a_n=\frac{n}{n+1}$;

2. Берилген сан удаалаштыктарын эки жол менен: сан огунун чекиттери жана координата тегиздигинин чекиттери аркылуу сүрөттөгүлө.

3. Булардын кайсылары: а) өсүүчү; б) кемүүчү; в) өсүүчү жана кемүүчү; г) чектелген; д) чектелбеген удаалаштык болуп эсептелээрин көрсөткүлө.

103.

а) $a_n=-4\cdot 3^n$; в) $a_n=\frac{3^n-1}{3n-1}$; д) $a_n=(\frac{1}{n})^{(-1)^n}$;

б) $a_n=\frac{5}{2^n+1}$; г) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$; е) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$

формуласы менен берилген сан удаалаштыгынын алгачкы беш мүчөсүн тапкыла.

104. Эгер:

а) $a_1=10$, $a_{n+1}=a_n+10$; в) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2$;

б) $a_1=10$, $a_{n+1}=10a_n$; г) $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$

болсо, анда сан удаалаштыгынын алгачкы алты мүчөсүн жазгыла. Удаалаштыкты n-мүчөсүнүн формуласы аркылуу бергиле.

105.

а) $a_1=8$, $d=5$, $n=15$; в) $a_1=4$, $d=-\frac{1}{4}$, $n=13$;

б) $a_1=100$, $d=-10$, $n=11$; г) $a_1=-1{,}6$, $d=-0{,}2$, $n=23$

болгон арифметикалык прогрессиянын акыркы мүчөсүн тапкыла.

106. 13төн 81ге чейинки бардык так натуралдык сандардын суммасын тапкыла.

107.

а) натуралдык катардагы n-так санды жана n так сандардын суммасын тапкыла.

б) n-жуп санды жана n жуп сандардын суммасын тапкыла.

108. Арифметикалык прогрессиянын төртүнчү мүчөсү 10го, ал эми анын жетинчи мүчөсү 19га барабар. Бул прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана мүчөлөрүнүн санын тапкыла.

109. Арифметикалык прогрессиянын бардык мүчөлөрүнүн суммасы 28ге, анын үчүнчү мүчөсү 8ге, төртүнчү мүчөсү 5ке барабар. Бул прогрессиянын четки мүчөлөрүн жана мүчөлөрүнүн санын тапкыла.

110. Атасы ар бир уулуна беш жашынан баштап, алардын туулган күндөрүндө уулу канча жашта болсо ошончо китеп белек кылат. Беш уулунун жаштары айырмасы 3кө барабар болгон арифметикалык прогрессияны түзөт. Алардын библиотекасы 325 китеп болгондо ар бир уулу канча жашта болот?

111. Верандага чыгуучу тепкич 8 баскычтан турат. Биринчи баскычка калыңдыгы 10 см болгон бетон плитасы төшөлгөн; калган ар бир баскычтын бийиктиги 15 см. 2-, 3-, 4-баскычтардын жерден турган бийиктигин тапкыла. Веранданын полу жерден канча бийиктикте турат?

112. 3кө эселенген бардык үч орундуу сандардын суммасын эсептегиле.

113. Бардык мүчөлөрүнүн суммасы:

а) $5n^2-4n$; б) $6n^2-7n$

болгон арифметикалык прогрессияны тапкыла.

114. Каалаган мүчөсү:

а) $a_n=1{,}5n-48$; б) $a_n=2{,}8n-125$

формуласы аркылуу табыла турган удаалаштыктын бардык терс мүчөлөрүнүн суммасын тапкыла.

115. а) $a_n=7+3n$; б) $a_n=217-4n$ формуласы аркылуу берилген удаалаштыктын мүчөлөрү болуп эсептелген бардык эки орундуу сандардын суммасын тапкыла.

116. Арифметикалык прогрессияда:

а) $S_{10}=10$, $S_{30}=900$ болсо, анда S_4 тү тапкыла;

б) $S_{15}=S_{25}=150$ болсо, анда S_{30} ду тапкыла.

117. Арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы S_n белгилүү:

а) эгер $S_n=\frac{n^2}{4}-n$ болсо, анда анын алгачкы төрт мүчөсүн;

б) эгер $S_n=2n^2+3n$ болсо, анда анын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тапкыла.

118. Геометриялык прогрессияда анын биринчи мүчөсү b_1 жана бөлүмү q белгилүү. Эгер:

а) $b_1=\frac{243}{256}$, $q=\frac{2}{3}$, $n=8$; б) $b_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $q=-\sqrt{6}$, $n=5$

болсо, анда b_n ди тапкыла.

119. $\frac{15}{8}$ жана 240 сандарынын арасына геометриялык прогрессияны түзгүдөй кылып алты санды коюп чыккыла.

120. Арифметикалык прогрессиянын 1-, 20- жана 58-мүчөлөрү геометриялык прогрессияны түзүшөт. Геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тапкыла.

121. Алгачкы n мүчөсүнүн суммасы:

а) $S_n=n^2-1$; б) $S_n=2^n-1$; в) $S_n=3^n+1$

формуласы менен табыла турган удаалаштык геометриялык прогрессия болуп эсептелеби?

122. Эгер $b_1=\frac{2}{3}$ жана $b_n=\frac{9}{32}$ болсо, анда төрт мүчөдөн турган геометриялык прогрессиянын бөлүмү эмнеге барабар?

123. Эгер:

а) $\begin{cases} b_4-b_2=18, \\ b_5-b_3=36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_1-b_3+b_5=-65, \\ b_1+b_7=-325 \end{cases}$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн, бөлүмүн жана мүчөлөрүнүн санын аныктагыла.

124. Эгер:

а) $\begin{cases} b_7-b_4=-216, \\ b_5-b_4=-72, \\ S_n=1023; \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_1+b_5=17, \\ b_2+b_6=34, \\ S_n=31 \end{cases}$

болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн, бөлүмүн жана мүчөлөрүнүн санын аныктагыла.

125. Оң мүчөлүү геометриялык прогрессияда $S_2=4$, ал эми $S_3=13$. S_5 ти тапкыла.

126. Геометриялык прогрессиянын алтынчы жана төртүнчү мүчөлөрүнүн айырмасы 72ге, ал эми үчүнчү жана биринчи мүчөлөрүнүн айырмасы 9га барабар. Бул прогрессиянын алгачкы 8 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

127. Геометриялык прогрессия 6 мүчөдөн турат. Алгачкы үч мүчөсүнүн суммасы акыркы үч мүчөсүнүн суммасынан 8 эсе аз экендигин билип туруп, анын бөлүмүн тапкыла.

128. Четки мүчөлөрүнүн суммасы $11\frac{2}{3}$ ге, ал эми ортоңкуларыныкы 10го барабар болорун билип туруп, кемүүчү геометриялык прогрессияны түзө турган 4 санды тапкыла.

129. Геометриялык прогрессиянын алгачкы үч мүчөсүнүн суммасы 13кө, ал эми ошол эле мүчөлөрүнүн квадраттарынын суммасы 91ге барабар. Прогрессияны тапкыла.

130. Эгер: а) прогрессиянын суммасы 4кө барабар, ал эми анын бөлүмү $\frac{1}{2}$ болсо; б) прогрессиянын суммасы $2(\sqrt{2}+1)$ ге барабар, ал эми бөлүмү $\frac{1}{\sqrt{2}}$ болсо; в) алгачкы беш мүчөсүнүн суммасы $\frac{11}{8}$ ге барабар, ал эми прогрессиянын суммасы $\frac{4}{3}$ болсо, анда чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн тапкыла.

131. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсү $3\sqrt{3}$ кө, ал эми прогрессиянын суммасы $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$ ге барабар. Прогрессиянын бөлүмүн тапкыла.

132. Төмөнкү чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктүн ар бирин жөнөкөй бөлчөк түрүндө туюнткула: а) 2,01(06); б) 5,25(21).

133. Төмөнкү таза мезгилдүү ондук бөлчөктүн ар бирин чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнүн суммасы түрүндө көрсөткүлө жана ал сумманы тапкыла:

134. Төмөнкү таза мезгилдүү ондук бөлчөктүн ар бирин чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнүн суммасы түрүндө көрсөткүлө жана ал сумманы тапкыла:

а) 0,(2); в) 1,(3); д) 1,(27); ж) 3,(342);
б) 2,(7); г) 2,(21); е) 0,(19); з) 0,(901).

135. Саат 12де сааттын сааттык жана минуталык жебелери дал келишет. Ал жебелер канча убакыттан кийин кайрадан дал келишерин тапкыла.

138. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ теңдештигин далилдегиле.

139. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$ теңдештигин далилдегиле.

140. Каалаган натуралдык n үчүн n^3+5n саны 6га калдыксыз бөлүнө тургандыгын далилдегиле.

141. Каалаган натуралдык n үчүн:
а) 15^n+6 саны 7 ге;
б) $15^n-3^n+2^n$ саны 4кө эселүү экендигин далилдегиле.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}$$

IV глава

РАЦИОНАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА

---

§ 1. БҮТҮН КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

8-класста бүтүн көрсөткүчтүү даражаны өткөнбүз. Төмөндө ушул түшүнүктү жана анын касиеттерин бир аз эске салалы.

Бизге: $R=(-\infty, \infty)$ — анык (чыныгы) сандардын көптүгү, $Z=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ — бүтүн сандардын көптүгү, $N=\{1,2,3,...\}$ — натуралдык сандардын көптүгү экендиги белгилүү. Эми «$\in$» — «тиешелүү, жатат» деген сөздөрдү алмаштырар белги экендигин эстесек:

a — анык сан болсо, анда $a\in R$ деп,

m — бүтүн сан болсо, анда $m\in Z$ деп жазабыз.

Мисалы, $-1{,}5\in R$, $\frac{3}{7}\in R$, $-3\in Z$, $0\in Z$, $4\in Z$, $4\in N$, $19\in N$.

Эске салчу нерсе. R көптүгү Z көптүгүн, Z көптүгү N көптүгүн өзүнө камтыйт. Эгерде «$\subset$» белгиси көптүктөр үчүн «камтылат» дегенди билдирерин кабыл алсак, анда $N\subset Z\subset R$ деп жаза алабыз.

Эгерде $n\in N$, $m\in N$, $n>m$ жана $a\in R$, $a\neq0$ болсо, анда

$$a^n : a^m = a^{n-m} \tag{1}$$

экени белгилүү. Эми $n\leq m$ болсун дейли. Бул учурда $n-m$ терс же нөл болот жана (1)-формула эмнени билдирет деген суроо туулат. Мисалга кайрылалы.

Мисал. Эгерде $n=3$, $m=5$ болсо, анда биринчиден, (1) формуласы боюнча

$$a^3:a^5=a^{3-5}=a^{-2}$$

болот. Экинчиден, бөлүүнүн эрежеси боюнча

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3\cdot a^2} = \frac{1}{a^2}$$

экенин алабыз.

$a^3 : a^5 = a^{-2}$, $a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2}$ барабардыктарынын сол жактары барабар. Демек, алардын оң жактары да барабар болушу керек: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Бул мисалдын негизинде төмөнкү аныктама келип чыгат.

1 - *аныктама.* **Эгерде $0 \neq a \in R$, $n \in N$ болсо, анда**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \tag{2}$$

Мисалдар:

1) $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{32}$; 2) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$;

3) $(-0{,}2)^{-4} = \frac{1}{(0{,}2)^4} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^4} = 5^4 = 625$.

Эгерде $m=n$ десек, анда (1) формуласы боюнча:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 .$$

Ал эми бөлүүнүн эрежеси боюнча:

$$a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1 \text{ же } a^0 = 1 \text{ болот.}$$

2 - аныктама. **Эгерде $0 \neq a \in R$ болсо, анда**

$$a^0 = 1 .$$

Мындагы эстеп калчу жагдай: сөзсүз $a \neq 0$ болуш керек.

Мисалдар:

1) $(-\frac{1}{2})^0 = 1$; 2) $9^0 = 1$; 3) $(1{,}2(3))^0 = 1$.

Мурдагы өткөндөрдү эске алсак, анда: натуралдык көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттери бүтүн даражалуу көрсөткүч үчүн да сакталат. Б.а. $0 \neq a \in R$, $0 \neq b \in R$ жана $n \in Z$, $m \in Z$ болсо, анда төмөнкү формулалар орун алат:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^n)^m = a^{nm}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Бул формулалардын далилдөөлөрү 8-класста өтүлгөн.

Эскертүү. $n \in Z$, $m \in Z$ болгондо бул формулалар натуралдык даражанын аныктоосу боюнча оңой эле далилденет. Ал эми $n<0$, $m<0$ же $n>0$, $m<0$ же $n<0$, $m>0$ болгон учурларда (2) формуласын колдонуп, анан натуралдык даражанын аныктоосун пайдалансак, анда 1)—5) формулалар туура экенине ынанабыз.

Бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиеттеринин жардамы менен көнүгүүлөрдү аткарууга айрым мисалдарды келтирели.

Мисалдар:

1) $2^{-3}\cdot 2^{19}\cdot 2^{-15}=2^{-3+19-15}=2^1=2;$

2) $a\neq 0$, $b\neq 0$ болсо, анда

$$\left(\frac{a^{-4}}{5b^3}\right)^{-2}=\frac{a^{-4(-2)}}{5^{-2}\cdot b^{3(-2)}}=\frac{5^2\cdot a^8}{b^{-6}}=25a^8\cdot b^6\ ;$$

3) $x\neq 0$, $y\neq 0$ болсо, анда

$$(x^2-y^2):(x^{-2}-y^{-2})=(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)=(x^2-y^2):\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}=$$

$$=\frac{(x^2-y^2)\cdot x^2y^2}{y^2-x^2}=-x^2y^2.$$

Көнүгүүлөрдү туура аткаруу үчүн (1), (2), 1)—5) формулаларын жакшы колдоно билүү талап кылынат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Тамгалар менен берилген көнүгүүлөрдө (1), (2), 1)—5) формулаларын колдонуу шарттары аткарылат деп эсептелинет.

1. Оозеки эсептегиле:

а) $a^3:a^{-2};\ \ 4^4\cdot 4^{-4};\ \ x^5:x^{-1};$

б) $a^6:a^3;\ \ a^3:a^{-2};\ \ a^{-7}:a^{-5}$

в) $2^4:16;\ \ 3^{-2}\cdot 27;\ \ 81\cdot 9^{-1};$

г) $6^{-2}\cdot 2^2\cdot 3^2;\ \ \left(\frac{25}{4}\right)^{-3}\cdot\frac{125}{16};\ \ (3^2)^3;$

д) $(-5)^2\cdot 5^{-2};\ \ (-7)^4:7^2;\ \ (-9)^{-2}\cdot 81;\ \ (\sqrt{2}-\sqrt{3})^0;$

е) $(a^2+a+1)^0;\ \ (a^4+4)^0;\ \ (-5+4)^0.$

2. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $(x^{-4}-x^2+x^{-1}):x^{-1};$ в) $(ax^{-3}-bx^{-1}):x^{-4};$

б) $(ax^2+bx)\cdot x^{-2}$; г) $(a^{-4}+a^{-2}\cdot b^{-1}+a\cdot b^{-2}-a^0\cdot b^{-3})\cdot a^4b^{-4}.$

3. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $(2x-3x^{-1})(3x+2x^{-1});$ б) $(3m-2n^{-1})(4m^3-5n^{-2});$

в) $(a^{-2}-a^{-1}+1)(a^{-2}+a)$;

г) $(3p^{-2}-2p^{-1}-p^{0})(-4p^{2}+p^{-1})$;

д) $(x^{5}-y^{5}):(x-y)$.

4. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $(x^{2}-y^{2})(x^{-1}+y^{-1})$;

б) $(x^{-3}+x^{-2}-x^{0}-x):(x^{-2}+x^{-1}+x^{0})$;

в) $(6a^{2}-10a-6+4a^{-1}):(3a+1-a^{-1})$;

г) $(8m-22+31m^{-1}-20m^{-2}):(2m-3+4m^{-1})$;

д) $(x^{2}-y^{2}):(x^{-1}-y^{-1})$.

5. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $(-a^{2})^{-3}$; $(-1)^{2n}$; $(-1)^{2n-1}$;

б) $(\frac{3x^{-1}}{5a^{-2}})^{-1}$; $\left[(-\frac{1}{3})^{-2}\right]^{-1}$;

в) $\left[(-\frac{m}{n})^{-3}\right]^{-1}$;

г) $\left(-\frac{5a^{n-1}}{3b^{n}}\right)^{-2}$.

6. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $(x^{2}+x^{-2})^{2}-x^{4}-x^{-4}$;

б) $(x^{-2}+a^{-3})(x^{-2}-a^{-3})$;

в) $[m-(1-m)^{-1}]\cdot\frac{m(m-2)+m^{0}}{\frac{1}{m^{-2}}-m+1}$;

г) $\frac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}(a^{2}-2ab+b^{2})^{-2}$.

7. $\frac{[1{,}5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}-2b^{-1}+\frac{(1-b^{-1})^{2}}{a^{-1}-1}\right]$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө жана анын $a=-4$, $b=-\frac{1}{2}$ болгондогу маанисин тапкыла.

8.

а) $f(x)=(x^{3}-5x+9)^{x^{4}+5x-6}$, $f(1)=?$;

б) $f(x)=3^{4-|x|}$, $f(-5)=?$;

в) $f(x)=(2x^{5}-6x^{4}+3x^{2}-x+4)^{|x-2|}$, $f(2)=?$

Микрокалькулятордо эсептөөлөрдү жүргүзүүдө санды стандарттык түрдө жазуу кеңири колдонулат. Ар кандай сандын стандарттык түрү — бул санды

$$a\cdot 10^{n}$$

түрүндө жазуу болуп эсептелет. Мында $1\leq|a|\leq 10$, $n\in Z$, a — сандын мантиссасы, n — сандын тартиби деп аталат.

Мисалы: $342=3{,}42\cdot 10^{2}$; $0{,}2=2\cdot 10^{-1}$; $0{,}0031=3{,}1\cdot 10^{-3}$.

Демек, санды стандарттык түрдө жазууда бүтүн көрсөткүчтүү даража колдонулат.

9. Санды стандарттык түрдө жазгыла:

а) $0{,}0000024$;
б) 200^{-3};
в) $(0{,}004)^{-3}$;
г) $(0{,}002)^{4}$;
д) $0{,}000000019$;
е) $\frac{1}{25}$;
ж) $\frac{1}{625}$;
з) 1999;
и) 2000;
к) 998877;
л) 2001;
м) 1000000.

10. Грипп оорусунун вирусунун өлчөмү 10^{-4} мм ге жакын. Бул санды ондук бөлчөк түрүндө жазгыла.

§ 2. *n*-ДАРАЖАЛУУ ТАМЫР ЖАНА АНЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТИ

Бизге $a \in R$ санынын квадраты $a^2 = a \cdot a$ деп аныкталары жана a санынын квадрат тамыры деп, квадраты a га барабар болгон сан аталары белгилүү. Ошондой эле a санынын квадрат тамыры $\sqrt{a}$ деп белгиленет. Мында: $\sqrt{}$ белгиси *радикал* деп аталат.

Демек, квадрат тамырдын аныктамасы боюнча

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

болушу керек. Ошон үчүн бул барабардык боюнча табылган квадрат тамырдын туура же туура эместигин текшерүүгө болот.

1-мисал. 36 санынын квадрат тамырлары: $\sqrt{36} = 6$ жана $-\sqrt{36} = -6$ анткени $6^2 = 36$, $(-6)^2 = 36$.

Эми төмөнкү суроону коёлу. Квадрат тамыр берилген $a \in R$ саны үчүн кайсы учурда жашайт, кантип аныкталат жана саны канча? Бул үчүн адегенде мисалга кайрылалы.

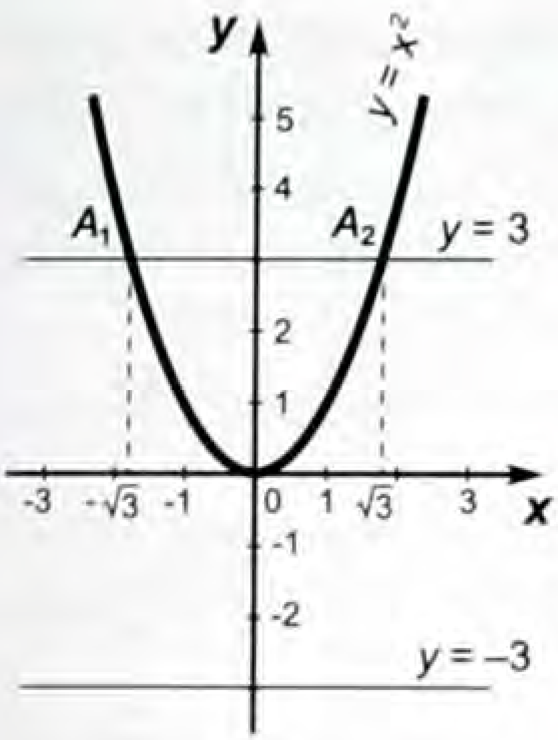
2-мисал. Бизге $x^2 = 3$ жана $x^2 = -3$ квадраттык теңдемелерин чыгарууга туура келсин дейли.

Бул тендемелерди эки жол менен чыгарууга болот.

1-жол. Эгерде $3 = (\sqrt{3})^2$ экенин эске алсак жана $b = \sqrt{3}$ деп белгилесек, анда берилген 1-теңдемеден

$$x^2 = b^2$$

экендигине келебиз. Кыскача көбөйтүүнүн $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ формуласын пайдалансак, анда $(x - b)(x + b) = 0$ гө ээ болобуз жана мындан: $x - b = 0$ же $x + b = 0$, же болбосо $x_1 = b$, $x_2 = -b$ чыгарылыштарына ээ болобуз.



40-сүрөт.

Демек, $x^2=3$ теңдемесинин эки тамыры бар:

$$x_1=b=\sqrt{3}\,,\quad x_2=-b=-\sqrt{3}\,.$$

Ал эми $x^2=-3$ теңдемесинин анык тамыры жок, анткени бул квадраттык теңдеменин дискриминанты $D=-12<0$. Демек, $a=-3$ саны үчүн квадрат тамыр жашабайт.

2-жол. Теңдемени чыгаруунун график методун колдонолу. Бул методдун мазмуну төмөнкүчө: эгерде $y=f_1(x)$ жана $y=f_2(x)$ функцияларынын графиктери кесилишсе, анда алардан кесилиш чекиттеринин абсциссалары $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесинин тамырлары болушат.

Биздин мисалда $x^2=3$ теңдемеси үчүн $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=3$ десек болот. Бул эки функциянын: $y=x^2$ параболасынын жана $y=3$ түз сызыгынын графиктери 40-сүрөттө көрсөтүлгөндөй $A_1(\sqrt{3};3)$ жана $A_2(-\sqrt{3};3)$ чекиттеринде кесилишет.

Демек, A_1 жана A_2 чекиттеринин абсциссалары: $x_1=\sqrt{3}$ жана $x_2=-\sqrt{3}$.

Ал эми $x^2=-3$ теңдемесинде $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=-3$ десек, анда 40-сүрөттөн көрүнүп тургандай $y=x^2$ параболасы менен $y=-3$ түз сызыктарынын графиктери кесилишпейт. Ошон үчүн, $x^2=-3$ теңдемесинин анык тамыры жок.

Жогоруда каралган 1-мисалды талдасак, анда квадрат тамырдын аныктамасынын негизинде $x^2=x\cdot x=3$ теңдемесинин эки тамыры $a=3$ санынын квадрат тамыры болот. Демек, $a=3$ түн квадарт тамыры экөө: $\sqrt{3}$ жана $-\sqrt{3}$. Ал эми $a=-3$ түн квадрат тамыры жок.

Квадрат тамырдын аныктамасын жана ар кандай $b\in R$ саны үчүн дайыма $b^2\geq 0$ болорун эске алсак, анда: $a\in R$ санынын квадрат тамыры $a\geq 0$ болгондо гана жашайт жана $a>0$ саны үчүн: $\sqrt{a}$ жана $-\sqrt{a}$ экөөсү квадрат тамырлар болушат. Ал эми $a<0$ болгондо $\sqrt{-a}$ жашабайт.

Демек, $0<a\in R$ саны үчүн квадрат тамырлар экөө:

$$\sqrt{a}\ \text{жана}\ -\sqrt{a}.$$

Ошондой эле эстеп койчу нерсе: $a=0$ болсо, анда $\sqrt{0}=0$.

Квадрат тамыр 2-даражалуу тамыр экенин эске алсак, анда үчүнчү даражалуу тамыр кантип аныкталат деген суроо туулат.

Квадрат тамырдын аныктамасы сыяктуу эле: $a\in R$ санынын үчүнчү даражалуу тамыры деп, үчүнчү даражага көтөргөндө a

санын бере турган санды аташат жана радикал белгисинин жардамы менен $\sqrt[3]{a}$ деп жазышат.

Демек, аныктама боюнча

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

болушу керек.

3-мисал. 8 санынын үчүнчү даражалуу тамыры: $\sqrt[3]{8} = 2$, анткени $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Эми үчүнчү даражалуу тамыр кайсы сандар үчүн аныкталат жана саны канча деген суроо коёлу. Бул суроого жооп иретинде мисалга кайрылалы.

4-мисал. Бизге $x^3=2$ жана $x^3=-2$ деген эки кубдук теңдемелер берилсин дейли жана аларды чыгаруу талап кылынсын.

Бул мисалды да 1-мисал сыяктуу эле эки жол менен чыгаралы.

1-жол. Эгерде $2 = (\sqrt[3]{2})^3$ экенин эске алып, $c = \sqrt[3]{2}$ деп белгилесек, анда берилген теңдемелерден

$$x^3 = c^3 \text{ жана } x^3 = -c^3 \text{ же } x^3 - c^3 = 0, \quad x^3 + c^3 = 0 \, (1)$$

теңдемелерин алабыз. Кыскача көбөйтүүнүн

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

формулаларын жана

$$x^2 \pm cx + c^2 = x^2 \pm 2\frac{cx}{2} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} + c^2 = (x \pm \frac{c}{2})^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0$$

экенин пайдалансак, анда (1) теңдемелеринен $x-c=0$, $x+c=0$ сыяктуу теңдемелерине келебиз.

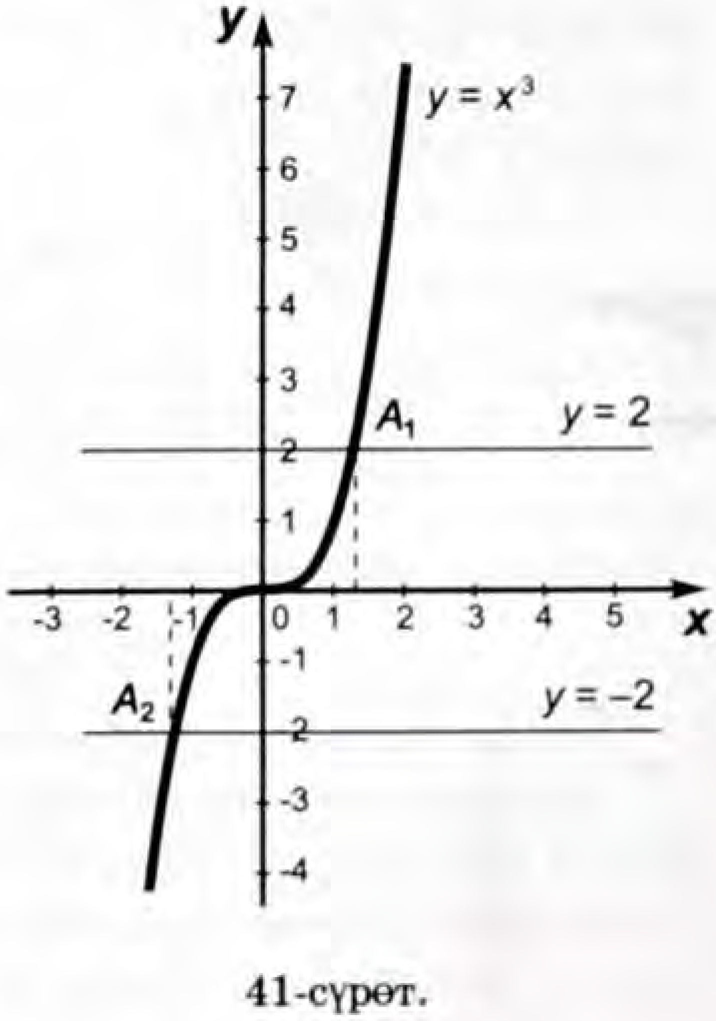
Мындан

$$x_1 = c, \quad x_2 = -c \text{ же } x_1 = \sqrt[3]{2}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{2}$$

келип чыгат.

Демек, $x_1 = \sqrt[3]{2}$ — берилген $x^3=2$ теңдемесинин тамыры, $x_2 = -\sqrt[3]{2}$ — берилген $x^3=-2$ теңдемесинин тамыры болот.

2-жол. Жогорку 2-мисалдагы сыяктуу эле теңдемелерди чыгаруунун график методун колдонолу. Эки теңдеме үчүн тең $f_1(x)=x^3$ деп жана $f_2(x)=2$, $f_2(x)=-2$ деп бир эле чийме чиели (41-сүрөт).



41-сүрөт.

41-сүрөттөн көрүнүп тургандай $y = x^3$ кубдук параболасынын жана

$y=2$, $y=-2$ түз сызыктарынын графиктеринин кесилиштериндеги $A_1(\sqrt[3]{2};2)$ жана $A_2(-\sqrt[3]{2};-2)$ чекиттеринин абсциссалары $x_1=\sqrt[3]{2}$ жана $x_2=-\sqrt[3]{2}$ берилген $x^3=2$ жана $x^3=-2$ теңдемелеринин тамырлары болушат.

Эскертүү. Үчүнчү даражалуу тамырды куб тамыр деп аташат.

Эми $a \in R$ санынын үчүнчү даражасынын аныктамасын эске алсак, анда $a^3=a \cdot a \cdot a=a^2 \cdot a$ санынын белгиси a нын белгисине жараша оң да, терс да болушу мүмкүн.

Демек, $a \in R$ санынын үчүнчү даражалуу тамыры же куб тамыры a санынын бардык маанилеринде аныкталат жана ал бирөө гана.

Буга далил жогорудагы 4-мисал боло алат: $x^3=2$ теңдемесинин тамыры $x=\sqrt[3]{2}$ бирөө гана жана ал куб тамырдын аныктамасынын негизинде $a=2$ санынын куб тамыры боло алат:

$$x^3=x \cdot x \cdot x=(\sqrt[3]{2})^3=2.$$

Ошондой эле $x^3=-2$ теңдемесинин да тамыры $x=-\sqrt[3]{2}$ бирөө эле жана ал $a=-2$ санынын куб тамыры болот:

$$x^3=x \cdot x \cdot x=(-\sqrt[3]{2})^3=-2.$$

Дагы суроо туулат: берилген $a \in R$ саны үчүн 4-даражалуу, 5-даражалуу жана андан жогорку даражалуу тамырларды кантип аныктоого болот?

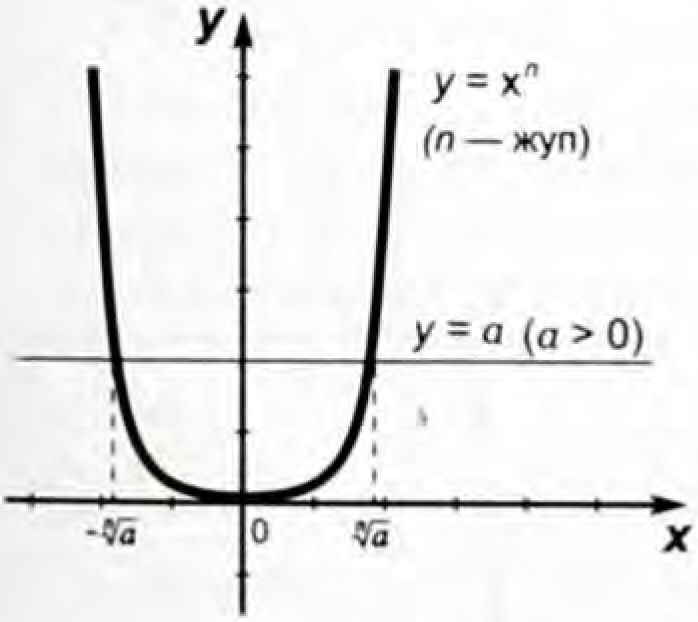
Бул суроого жооп издейли.

Бизге $y=x^n$ функциясы берилсин жана $n \in N$ болсун. Эгерде $n=2k$, $k \in N$ же n жуп сан болсо, анда $y=x^n=x^{2k}$ функциясы үчүн жуп функциянын аныктамасындагы шарт аткарылат: $y(-x)=y(x)$ же $(-x)^{2k}=x^{2k}$ себеби $(-1)^{2k}=1$. Мындан $y=x^{2k}$ функциясынын графиги y огуна же ординаталар огуна карата симметриялуу болору келип чыгат (42-сүрөт). Эми ар кандай $x \in R$ үчүн $x^{2k} \geq 0$ экенин пайдалансак, анда

$$x^{2k}=a, \quad a \in R \tag{3}$$

теңдемесинин тамырлары $a \geq 0$ болгондо гана аныкталат жана $a=0$ болсо, $x=0$, ал эми $a>0$ болсо, анда $x_1=\sqrt[2k]{a}$, $x_2=-\sqrt[2k]{a}$ болушат (42-сүрөт).

Демек, $x^{2k}=a$, $a>0$ теңдемесинин эки тамыры бар жана аларды радикалдын жардамы менен $x_1=\sqrt[2k]{a}$, $x_2=-\sqrt[2k]{a}$ деп жазсак болот.



42-сүрөт.

Эми $n=2k+1$, $k\in N$ же n так сан болсун десек, анда $y=x^{2k+1}$ функциясы так функциянын аныктамасын канааттандырат, б.а. $y(-x)=(-x)^{2k+1}=-x^{2k}=-y(x)$, себеби $(-1)^{2k+1}=-1$. Так функциянын графиги координата башталмасына же (0; 0) чекитине карата симметриялуу болору белгилүү. Бул фактыны эске алсак, анда $y=x^{2k+1}$ функциясынын графиги $y=x^3$ функциясынын графиги сыяктуу эле болот (43-сүрөт).

43-сүрөттөн көрүнүп тургандай $a\in R$ санынын ар кандай мааниси үчүн,

$$x^{2k+1}=a \tag{4}$$

теңдемесинин бир эле тамыры болот: эгерде $a>0$ болсо, $x_1=\sqrt[2k+1]{a}$, эгерде $a<0$ болсо, $x_1=-\sqrt[2k+1]{a}$.

Демек, $x^{2k+1}=a$, $a>0$ теңдемесинин бир гана тамыры бар жана аны радикалдын жардамы менен

$$x_1=\sqrt[2k+1]{a}$$

деп жазууга болот.

Квадрат жана куб тамырларынын аныктамасы сыяктуу эле төмөнкү аныктаманы кийирүүгө болот.

3-аныктама. **Берилген $a\in R$ санынын n-даражалуу тамыры деп, n-даражасы a га барабар болгон сан аталат** жана радикалдын жардамы менен $\sqrt[n]{a}$ деп белгиленет.

Демек,

$n=2$ болгондо $\sqrt{a}$ — квадрат тамыр,

$n=3$ болгондо $\sqrt[3]{a}$ — куб тамыр,

$n=4$ болгондо $\sqrt[4]{a}$ — төртүнчү даражалуу тамыр,

$n=93$ болгондо $\sqrt[93]{a}$ — токсон үчүнчү даражалуу тамыр.

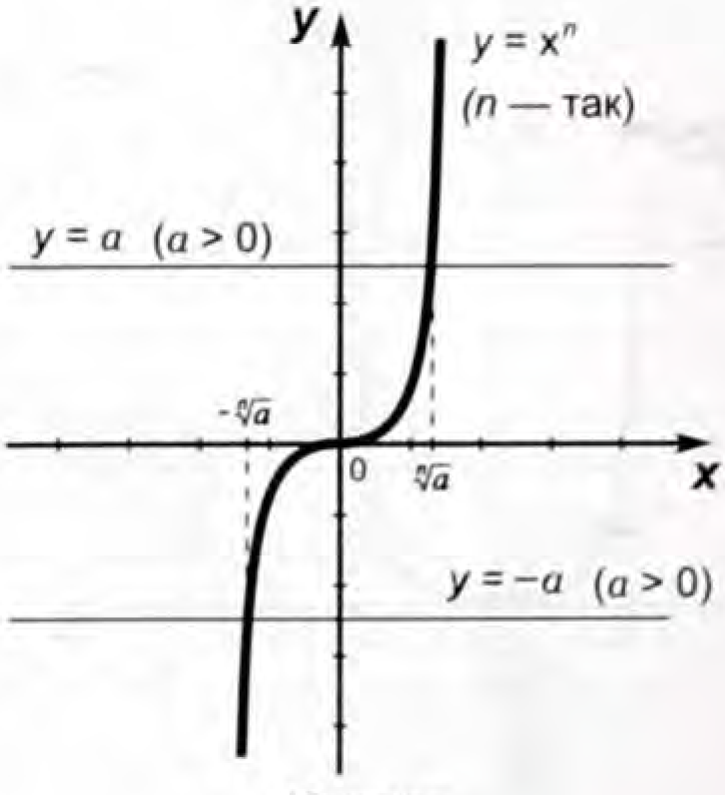
Бир гана квадрат тамыр үчүн радикалдын үстүнө 2 деген цифра же тамыр көрсөткүчү жазылбайт: $\sqrt{a}$.

Радикалдагы n саны радикалдын даражасы деп аталат. Мисалы: $\sqrt[7]{a}$ десек, a нын 7-даражадагы радикалы деп окулат.

Аныктама боюнча

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

болушу керек. Бул барабардыктын негизинде натуралдык n-даражалуу тамырды туура же туура эмес тапканыбызды текшерүүгө болот.



43-сүрөт.

Мисалдар:

1) $\sqrt[11]{2048}=2$, анткени $2^{11}=2048$;

2) $\sqrt[4]{39{,}0625}=2{,}5$ болот, анткени $(2{,}5)^4=39{,}0625$; $\sqrt[5]{36}=2$ эмес, анткени $2^5=32\neq 36$.

Эми бир орчундуу суроо туулат: каалагандай эле $a\in R$ саны үчүн n-даражалуу тамыр аныкталабы?

Эскертүү. $a=0$ болсо, анын n-даражалуу тамыры да 0 болот: $\sqrt[n]{0}=0$.

Квадрат, куб тамырларынын касиеттерин жана жуп даражалуу (3) теңдемесинин, так даражалуу (4) теңдемесинин тамырларын эске алсак, анда натуралдык n-даражалуу тамырлар үчүн төмөнкүдөй жыйынтыкка ээ болобуз:

Эгерде n жуп сан болсо, анда $a\in R$ саны $a>0$ шартын канааттандырса гана төмөнкү белгилери карама-каршы: $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ сандары a санынын n-даражалуу тамырлары болушат; n так сан болсо, анда каалагандай $a\in R$ саны үчүн $\sqrt[n]{a}$ саны a санынын n-даражалуу тамыры болот.

Демек, $n=2k$, $k\in N$ болсо, анда $0<a\in R$ үчүн $\sqrt[2k]{a}$, $-\sqrt[2k]{a}$ деген эки n-даражалуу тамыр, ал эми $n=2k+1$, $k\in N$ болсо, анда каалагандай $a\in R$ үчүн

$$\sqrt[2k+1]{a}$$

деген бир гана n-даражалуу тамыр табылат.

Мисалдар:

1) 16нын квадрат тамырлары: $\sqrt{16}=4$, $-\sqrt{16}=-4$, төртүнчү даражалуу тамырлары: $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$, 5-даражалуу тамыры бирөө эле: $\sqrt[5]{16}$;

2) -729 санынын квадрат тамыры жок (жашабайт), ал эми куб тамыры $\sqrt[3]{-729}=-9$ га барабар;

3) $-0{,}00001$ санынын 5-даражалуу тамыры: $-\sqrt[5]{0{,}00001}=-0{,}1$;

4) $\frac{25}{81}$ дин квадрат тамырлары: $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{5}{9}$, $-\sqrt{\frac{25}{81}}=-\frac{5}{9}$.

Натуралдык n-даражалуу тамырдын негизги касиети төмөнкүдөй: эгерде тамырдын даражасын жана тамыр астындагы туюнтманын даражасын бирдей натуралдык санга көбөйтсөк же бөлсөк, анда натуралдык n-даражалуу тамырдын чоңдугу өзгөрбөйт:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}.$$

Мында $k\in N$, $m\in Z$, $a>0$.

Мисалы, $\sqrt[4]{3^8}=\sqrt[12]{3^{24}}=\sqrt{3^4}=3^2=9$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

11. (*Оозеки*). Төмөнкү теңдеме канча чыгарылышка ээ жана эмне үчүн?

а) $x^2=10$;
б) $x^3=-7$;
в) $x^4=12$;
г) $x^5=\sqrt[3]{3}$;
д) $x^{100}=319$;
е) $x^{1001}=1001$;
ж) $x^{90099}=-1$;
з) $x^{2000}=3000$;
и) $x^{30002}=169$;
к) $x^4=-16$;
л) $x^{22}=-43$;
м) $x^{408}=-10$;
н) $x^8=-0{,}1$;
о) $x^{10231}=-96$;
п) $x^2=-29$.

12. a санынын n-даражалуу тамырын тапкыла:

а) $a=11$, $n=24$;
б) $a=-13$, $n=5$;
в) $a=123$, $n=32$;
г) $a=-43$, $n=7$;
д) $a=-12096{,}3$, $n=-101$;
е) $a=\sqrt{129}$, $n=6$;
ж) $a=\frac{169}{289}$, $n=2$;
з) $a=-729$, $n=3$.

13. а) $y=x^{12}$; б) $y=x^{13}$; в) $y=x^{102}$; г) $y=-x^{123}$; функциясынын графиги кайсы координаттык чейректерде жайланышкан?

Көрсөтмө. Жуп жана так функциялардын аныктамасын жана касиеттерин эстегиле.

14. Аналитикалык жана графиктик методдор менен төмөнкү теңдемени чыгаргыла:

а) $x^4=5$; б) $x^5=5$; в) $(x-1)^2=6$; г) $x^8=1$.

Эскертүү. Формулаларды өзгөртүп түзүү колдонулган методду *аналитикалык метод* дейбиз. Аналитикалык деген формулалардын жардамы менен дегенди билдирет. Бул учурда график чийүүнүн кереги жок.

15. Аналитикалык метод менен теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2=5041$;
б) $x^2=9604$;
в) $x^2=0{,}4624$;
г) $\frac{5}{9}x^2=3380$;
д) $0{,}09x^2=0{,}6084$;
е) $x^3=1000$;
ж) $x^4=625$;
з) $x^9=512$;
и) $(x-2)^3=64$;
к) $(x+1)^3=-729$;
л) $(x-3)^4=81$;
м) $(x^2-1)^2=9$.

16. График методу менен теңдемени чыгаргыла:

а) $x^3=x+6$; б) $x^2=3-x$; в) $x^5=x$.

17. График методун, «интервалды экиге бөлүү» методун жана микрокалькуляторду колдонуп, төмөнкү теңдеменин тамырын берилген сан ε го чейинки тактык менен болжолдоп тапкыла:

а) $x^3=x+1,\ \varepsilon=0{,}01$; г) $x^2=x+6,\ \varepsilon=0{,}001$;

б) $x^2=x+2,\ \varepsilon=0{,}001$; д) $x^3=-x-5,\ \varepsilon=0{,}01$;

в) $x^4=x+3,\ \varepsilon=0{,}01$; е) $x^5=x+1,\ \varepsilon=0{,}01$.

Көрсөтмө. Бул көнүгүүнү аткаруу үчүн төмөнкү теорияны пайдалануу керек.

Бизге $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесинин тамырлары бар экендиги белгилүү болсун жана аларды берилген сан ε го чейинки тактык менен табууга туура келсин дейли. Бул үчүн төмөнкүчө киришсе болот. Адегенде, график методунун жардамы менен $y=f_1(x)$ жана $y=f_2(x)$ функцияларынын кесилиш чекиттеринин абсциссаларын табабыз. Аныктык үчүн, бул функциялар абсциссасы x_0 болгон чекитте кесилишсин дейли.

Эскертүү. Эгерде $y=f_1(x)$ жана $y=f_2(x)$ көп чекитте кесилишсе, б.а. берилген $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесинин тамырлары экөө жана андан көп болушса, анда ар бир тамырды өзүнчө, жалгыздап болжолдоп табабыз. Тактап айтканда, бир тамыр үчүн эмнени жасасак, көп тамырдын ар бирине ошону кайталап жасап чыгабыз.

Эми $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ деп белгилейли, анда $f(x_0)=f_1(x_0)-f_2(x_0)=0$ болот, себеби $x=x_0$ — берилген теңдеменин тамыры. Графиктин жардамы менен изделүүчү тамыр x_0 кандайдыр бир $(a_0,\ a_1)$ интервалында жатарын аныктайлы дейли. Бул үчүн:

$$f(a_0)\ f(a_1)<0$$

шарты аткарылышы керек (Эмне үчүн? Ойлонуп көргүлөчү!).

Эми $(a_0,\ a_1)$ интервалынын орто чекитин алалы: $\frac{a_0+a_1}{2}=a_2$ жана $f(a_2)$ ни эсептеп, $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$ лердин белгилерин салыштыралы. Эмне үчүн? Анткени, эгерде $f(a_0)f(a_1)<0$, $f(a_1)f(a_2)>0$ болсо, анда изделүүчү тамыр $(a_0,\ a_1)$ интервалында болот. Тескерисинче, $f(a_0)f(a_1)>0$, $f(a_1)f(a_2)<0$ болгондо, анда $x_0\in(a_1,\ a_2)$ болмок. Аныктык үчүн, $x_0\in(a_1,\ a_2)$ болсун. Эми $(a_1,\ a_2)$ интервалынын орто чекитин алалы: $\frac{a_1+a_2}{2}=b_2$ жана $f(b_2)$ ни табалы, анан $f(a_1)$, $f(b_2)$, $f(a_2)$ лердин белгилерин салыштырабыз жана $f(a_1)f(b_2)>0$, $f(b_2)f(a_2)<0$ болсун. Анда изделүүчү тамыр $x_0\in(b_2,\ a_2)$ болот, б.а. изделүүчү тамыр $(b_2,\ a_2)$ интервалында жатат. Андан ары бул процессти: «интервалды экиге бөлүү» жана $f(x)$ тин үч маанисинин белгилерин салыштыруу ыкмасын колдонууну улантып жүрүп отуруп, аягында $x_0\in(b_k,\ a_k)$, $k\in N$ ди алалы дейли.

Төмөнкү суроонун туулушу мыйзам ченемдүү: бул процессти качан токтотобуз? Эгерде

$$|b_k-a_k|<\varepsilon \tag{1}$$

шарты аткарылса, анда бул процессти токтотобуз. Себеби, a_k, b_k сандары изделүүчү x_0 тамырынын жакындаштырылган маанилери. Ошон үчүн, жогорку (ε) шарты аткарылганда, (b_k, a_k) интервалындагы ар кандай сан x_0 дун берилген сан ε го чейинки тактык менен жакындатылган маанисин берет.

Демек, (b_k, a_k) интервалынан алынган каалаган сан берилген $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемесинин ε го чейинки тактыктагы жакындатылган тамыры болот. Маселен,

$$x_0 = \frac{b_k + a_k}{2}$$

деп алсак болот.

Ойлонуп көргүлө. Жогоруда эгерде $f(a_2)=0$ же $f(b_2)=0$ болгондо, анда x_0 ду андан ары издөөнүн кажети жок болмок? Эмне үчүн?

§ 3. *n*-ДАРАЖАЛУУ АРИФМЕТИКАЛЫК ТАМЫР

Жогорку параграфтагы n-даражалуу тамырдын касиетинин негизинде: $a \geq 0$ болсо, анда каалагандай $2 \leq n \in N$ үчүн $\sqrt[n]{a}$ туюнтмасы аныкталат жана ал терс эмес (≥ 0) сан болот. Буга мурунку параграфтагы (3), (4) теңдемелеринин $a \geq 0$ болгон учурда бир гана $2 \leq n$ — даражалуу терс эмес тамыры болору далил боло алат.

1 - *аныктама.* **Терс эмес $a \in R$ санынын натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамыры деп, n-даражасы a га барабар болгон, терс эмес сан аталат.**

Бул учурда $n \geq 2$ экенин эстен чыгарбайлы.

Берилген a санынын n-даражалуу арифметикалык тамыры радикалдын жардамы менен $\sqrt[n]{a}$ деп жазылат.

Мурдагыдай эле $n=2$ болгондо $\sqrt[2]{a}$ ордуна $\sqrt{a}$ деп жазабыз. Экинчи даражадагы арифметикалык тамырды квадрат тамыр, ал эми үчүнчү даражадагысын — куб тамыр дейбиз. Ошондой эле n-даражалуу арифметикалык тамырды кээде кыскача «n-даражалуу тамыр» деп да аташат.

Демек, эстеп койчу нерсе, 1-аныктаманын негизинде $\sqrt[n]{a} = b$ экенин далилдөө үчүн: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ шарттары аткарыларын көрсөтүү керек.

Мисалы: $\sqrt[4]{81} = 3$, себеби $3>0$ жана $3^4=81$. Демек, 3 саны 81дин 4-даражалуу арифметикалык тамыры.

Эскертүү. Арифметикалык тамырдын аныктамасынан (1-аныктамадан): эгерде $a \geq 0$ болсо, анда

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

экени келип чыгат.

Мисалы, $(\sqrt[3]{19})^3=19$, $\sqrt[7]{8^7}=8$.

n-даражалуу тамырды табуу амалын n-даражадагы тамыр чыгаруу амалы деп коюшат. Бул амал n-даражага көтөрүү амалына тескери амал экенин эстеп коёлу.

Эскертүү. Терс сандын так даражалуу тамырын ошол эле даражадагы арифметикалык тамыр аркылуу туюнтууга болот.

Бул учурда арифметикалык тамырдын алдына минус белгиси коюлат.

Мисалы, $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$, $\sqrt[5]{-2{,}9}=-\sqrt[5]{2{,}9}$.

Бул мисалда арифметикалык тамырлар: $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[5]{2{,}9}$.

Жалпы учурда: каалагандай $a\in R$ үчүн анын модулу (абсолюттук чоңдугу):

$$|\,a\,|=\begin{cases}\text{эгерде} \quad a\geq 0 \quad \text{болсо}, & a\\ \text{эгерде} \quad a<0 \quad \text{болсо}, & -a,\end{cases}$$

деп аныкталарын эске алсак, анда $a<0$ жана $n=2k+1$, $k\in N$, б.а. n-так натуралдык сан болгон учурда:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}$$

болот. Мында $\sqrt[2k+1]{a}$ — так натуралдык даражалуу тамыр.

Демек, $a<0$, $n=2k+1$, $k\in N$ болсо, анда $\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}$.

Мисалы, $\sqrt[3]{1-\sqrt{7}}=-\sqrt[3]{-(1-\sqrt{7})}=-\sqrt[3]{\sqrt{7}-1}$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

18. (*Оозеки*).

а) Төмөнкү сандардын арифметикалык квадрат тамырын тапкыла:

1; 0; 0,01; 16; 0,64; 144; $\frac{25}{196}$; $\frac{9}{361}$; $\frac{81}{400}$.

б) Төмөнкү сандардын арифметикалык куб тамырын тапкыла:

0; 1; 8; 27; 81; 125; 216; 729; $\frac{1}{81}$; 0,064; 0,001; $\frac{27}{1000}$.

в) Төмөнкү сандардын 4-даражалуу арифметикалык тамырын тапкыла:

0; 1; 81; 256; 625; 10000; $\frac{16}{81}$; $\frac{625}{256}$; 0,0001.

г) Төмөнкү сандардын 10-даражалуу арифметикалык тамырын тапкыла:

0; 1; 3^{10}; 5^{20}; 8^{10}; 2^{30}; 7^{40}; 100^{10}.

19. *(Оозеки).*

а) Жактары 20 м жана 80 м болгон тик бурчтуктун аянтына барабар аянтка ээ болгон квадраттын жагын тапкыла.

б) Кубдун көлөмү 125 см^3. Анын кырын тапкыла.

20. Төмөнкү барабардык туурабы:

а) $\sqrt{900}=30$;
б) $\sqrt[3]{343}=7$;
в) $\sqrt[100]{1}=1$;
г) $\sqrt[9]{0}=0$;
д) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=-\frac{1}{2}$;
е) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$;
ж) $\sqrt[9]{512}=-2$;
з) $\sqrt{961}=-31$?

21. Төмөнкү барабардык a нын кандай маанилеринде туура:

а) $\sqrt{a^2}=a$; б) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; в) $\sqrt[3]{a^3}=a$; г) $\sqrt{a^2}=|a|$?

22. Эсептегиле:

а) $\sqrt[6]{36^3}$;
б) $\sqrt[12]{64^2}$;
в) $\sqrt[9]{27^3}$;
г) $\sqrt[8]{(\frac{1}{25})^4}$;
д) $\sqrt[15]{32^9}$;
е) $\sqrt[6]{729}$.

23. Эсептегиле:

а) $\sqrt{10^4}$;
б) $\sqrt[3]{3^{15}}$;
в) $\sqrt[12]{(\frac{1}{2})^{48}}$;
г) $\sqrt[23]{(\frac{1}{3})^{46}}$;
д) $-\frac{1}{5}\cdot\sqrt[4]{625}+\sqrt[4]{10000}$;
е) $\sqrt[3]{-1000}-\sqrt[3]{-729}+5$;
ж) $\sqrt[4]{0{,}0001}-2\sqrt{0{,}25}+\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}-5$;
з) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$.

24. Терс сандын n-даражалуу тамырын анын n-даражалуу арифметикалык тамыры аркылуу туюнткула:

а) $\sqrt[3]{-8}$;
б) $\sqrt[17]{-1}$;
в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$;
г) $\sqrt[4]{-1024}$;
д) $\sqrt[7]{-6^7}$;
е) $\sqrt[3]{-11^3}$;
ж) $\sqrt[3]{-41}$;
з) $\sqrt[5]{-93}$;
и) $\sqrt[101]{-2}$;
к) $\sqrt[1001]{-5^{1001}}$;
л) $\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}$;
м) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;
н) $\sqrt[3]{4-\sqrt{29}}$;
о) $\sqrt[3]{-2a}$, $a>0$;
п) $\sqrt[3]{1-x}$, $x>1$;
р) $\sqrt[5]{a-b}$, $a<b$;
с) $\sqrt[3]{(2-a)^3}$, $a>2$;
т) $\sqrt{a^2}$, $a<0$.

25. Арифметикалык тамырды тапкыла:

а) $\sqrt{25}$;
б) $\sqrt[4]{16}$;
в) $\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^2}$;
г) $\sqrt[4]{(-5)^4}$;
д) $\sqrt[4]{(-3)^4}$;
е) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

ж) $\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$;   и) $\sqrt[19]{(3-\sqrt{2})^{19}}$;   л) $\sqrt[30]{(7-\sqrt{101})^{30}}$;

з) $\sqrt[10]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{10}}$;   к) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4}$;   м) $\sqrt[13]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{13}}$.

26. Эсептегиле:

а) $\sqrt{(5-a)^2}$, $a \le 5$;   в) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$, $x \ge 3$;

б) $\sqrt{(5-a)^2}$, $a \ge 5$;   г) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$, $x \le 3$.

27. Эсептегиле:

а) $\sqrt{(x-y)^2}$, $x < y$;   д) $\sqrt[6]{(m-n)^6}$, $m > n$;

б) $\sqrt{(x-y)^2}$, $x > y$;   е) $\sqrt[6]{(m-n)^6}$, $m < n$;

в) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$, $a > b$;   ж) $\sqrt[5]{(a-b)^5}$, $a < b$;

г) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$, $a < b$;   з) $\sqrt[5]{(a-b)^5}$, $a > b$.

28. Төмөнкүнү далилдегиле:

а) $$2a+\sqrt{(a-3)^2}=\begin{cases} 3a-3, \text{ эгерде } a>3 \text{ болсо,} \\ a+3, \text{ эгерде } a<3 \text{ болсо,} \\ 2a, \text{ эгерде } a=3 \text{ болсо;} \end{cases}$$

б) $$m+n+\sqrt{(m-n)^2}=\begin{cases} 2m, \text{ эгерде } m>n \text{ болсо,} \\ 2n, \text{ эгерде } m<n \text{ болсо,} \\ m+n, \text{ эгерде } m=n \text{ болсо.} \end{cases}$$

29. Төмөнкү туюнтмалар x тин кандай маанилеринде аныкталат:

а) $\sqrt[4]{x-3}$;   в) $\sqrt[6]{3x-5}$;   д) $\sqrt[3]{x^2-x-7}$;   ж) $\sqrt[9]{\frac{x^2+1}{x-1}}$;

б) $\sqrt[5]{2-x}$;   г) $\sqrt[8]{7-14x}$;   е) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$;   з) $\sqrt[10]{x^2+1}$?

30. Эсептегиле:

а) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt[5]{32}$;   б) $0{,}5\cdot\sqrt[4]{256}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{-216}$.

31. Эсептегиле:

а) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$;   г) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

б) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;   д) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$;

в) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$;   е) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

32. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{ac}+\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{ac}-c}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}$;

б) $\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-a\sqrt{b}}$; г) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.

33. Эгерде $a>0$, $b>0$ жана $a^2-b>0$ болсо, анда

$$\text{а) } \sqrt{a^2+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\text{б) } \sqrt{a^2-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

формулалары туура экендигин далилдегиле.

Көрсөтмө. Далилдөө үчүн а) жана б) формулаларынын эки жагын квадратка көтөрүп, анан жөнөкөйлөтүп коюш керек.

Эстеп коёлу. 33-көнүгүүдөгү а), б) формулаларын татаал радикалдардын формулалары деп аташат.

34. Татаал радикалдардын формулаларын пайдаланып, төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$;

б) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$; г) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; е) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$.

§ 4. *n*-ДАРАЖАЛУУ АРИФМЕТИКАЛЫК ТАМЫРДЫН КАСИЕТТЕРИ

Арифметикалык квадрат тамырдын төмөнкүдөй касиеттери бар экендигин билесиңер:

1) эгерде $a\geq0$, $b\geq0$ болсо, анда $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

2) эгерде $a\geq0$, $b>0$ болсо, анда $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3) эгерде $a\geq0$, $n\in N$ болсо, анда $\sqrt{a^{2n}}=a^n$.

Арифметикалык квадрат тамырдын бул касиеттери квадрат тамырларын камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүүдө өтө кеңири колдонулат. Бул өзгөртүүлөрдүн эң негизгилери төмөнкү экөө:

а) көбөйтүүчүнү тамырдын астынан чыгаруу:

$$\sqrt{a^2\cdot b}=a\cdot\sqrt{b} \quad (a\geq0,\ b\geq0),$$

б) көбөйтүүчүнү тамырдын астына кийирүү:

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b} \quad (a\geq0,\ b\geq0)$$

экенин эске түйүп коёлу.

Арифметикалык квадрат тамырдын касиеттерин талдап отуруп, жалпы учурда, натуралдык $n \geq 2$ саны үчүн n-даражалуу арифметикалык тамыр кандай касиеттерге ээ деген суроонун берилишине таң калууга болбойт. Бул өзү мыйзам ченемдүү көрүнүш. Анда төмөнкү суроого жооп издейли.

Суроо: n-даражалуу арифметикалык тамырдын натуралдык $n \geq 2$ үчүн кандай касиеттери бар?

Жооп: n-даражалуу арифметикалык тамыр төмөндөгүдөй касиеттерге ээ.

1-касиет. Эгерде $a \geq 0$, $b \geq 0$ болсо, анда натуралдык $n \geq 2$ саны үчүн

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (A_1)$$

барабардыгы орун алат. Б.а., көбөйтүндүнүн n-даражалуу арифметикалык тамыры көбөйтүүчүлөрдүн n-даражалуу арифметикалык тамырларынын көбөйтүндүсүнө барабар.

2-касиет. Эгерде $a \geq 0$, $b > 0$ болсо, анда натуралдык $n \geq 2$ саны үчүн

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (A_2)$$

барабардыгы орун алат. Б.а., бөлчөктүн n-даражалуу арифметикалык тамыры анын алымынын n-даражалуу арифметикалык тамырын бөлүмүнүн n-даражалуу арифметикалык тамырына бөлгөнгө барабар.

3-касиет. Эгерде $a \geq 0$ болсо, анда натуралдык $n \geq 2$ жана натуралдык $m \geq 2$ сандары үчүн

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad (A_3)$$

барабардыгы орун алат. Б.а., n-даражалуу арифметикалык тамырдын натуралдык m-даражасы радикалдын астындагы туюнтманын m-даражасынын n-даражалуу арифметикалык тамырына барабар.

4-касиет. Эгерде $a \geq 0$ болсо, анда натуралдык $n \geq 2$ жана натуралдык $m \geq 2$ сандары үчүн

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (A_4)$$

барабардыгы орун алат. Б.а., каалагандай терс эмес a нын n-даражалуу арифметикалык тамырынын m-даражалуу тамыры анын $n \cdot m$-даражалуу арифметикалык тамырына барабар. Демек, радикалдан радикал алуу үчүн, ал радикалдардын даражаларын көбөйтүп коюу керек.

5-касиет. Эгерде $a \geq 0$ болсо, анда натуралдык $n \geq 2$, натуралдык $k \geq 2$ жана натуралдык $m \geq 2$ сандары үчүн

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (A_5)$$

барабардыгы орун алат. Б.а., арифметикалык тамырдын жана анын астындагы туюнтманын даражаларынын жалпы натуралдык көбөйтүүчүсүн кыскартууга болот.

Эми n-даражалуу арифметикалык тамырдын келтирилген беш касиети же (A_1)—(A_5) барабардыктары чын эле орун аларын далилдейли.

1-касиеттин далилдөөсү. Бул үчүн өзгөрмөлөрдүн көрсөтүлгөн маанилеринде: 1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$ жана 2) $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = a\cdot b$ шарттары аткарыларын же $a\cdot b$ үчүн n-даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасынын 2 шарты (3-параграфтагы 1), 2) шарттары) аткарыларын көрсөтүү керек. Бизге $a\geq 0$, $b\geq 0$ экени берилген. Андыктан $a\cdot b\geq 0$ жана $\sqrt[n]{a\cdot b}$ аныкталат (мааниге ээ). Ошондой эле $\sqrt[n]{a}\geq 0$, $\sqrt[n]{b}\geq 0$, себеби $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ — арифметикалык тамырлар. Мындан $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$ болорун же 1) шарты орундаларын алабыз. Эми көбөйтүндүнүн натуралдык n-даражасынын касиети боюнча $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n = a\cdot b$ же 2)-шарт да орундаларын алабыз. Демек, n-даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча (A_1) барабардыгынын сол жагы анын оң жагына барабар.

2-касиеттин далилдөөсү. Далилдөө биринчи касиеттикине окшош жүргүзүлөт. Бул учурда $a\geq 0$, $b>0$ болгондуктан $\frac{a}{b}\geq 0$ жана $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ аныкталат (мааниге ээ). Шарт боюнча $\sqrt[n]{a}$ жана $\sqrt[n]{b}$ — арифметикалык тамырлар. Мындан $\sqrt[n]{a}\geq 0$, $\sqrt[n]{b}>0$ экенин жана $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq 0$ болорун алабыз. Эми бөлчөктүн натуралдык даражасынын касиети боюнча

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

экенине ээ болобуз. Демек, n-даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасынын негизинде (A_2) барабардыгынын сол жагы анын оң жагына барабар деп айта алабыз.

3-касиеттин далилдөөсү. Биринчиден, $a\geq 0$ болгондуктан натуралдык n саны үчүн $(\sqrt[n]{a})^m$ аныкталарын жана ошондой эле $\sqrt[n]{a^m}$ да аныкталарын жана терс эмес болорун алабыз. Экинчиден, эми (A_3) барабардыгы орун аларын математикалык индукция методу менен жүргүзөлү. Бул методдун негизинде $m=2$ деп, туюнтманын квадратынын аныктамасын жана (A_1) барабардыгын ($a=b$ болгондо) колдонсок, анда:

$$(\sqrt[n]{a})^2 = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a\cdot a} = \sqrt[n]{a^2}$$

же (A_3) барабардыгы бул учурда туура экенин көрөбүз. Эми каалагандай натуралдык k саны үчүн же $m=k$ болгондо (A_3) барабардыгы туура болсун деп:

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}\ ,$$

натуралдык сан $k+1$ үчүн же $m=k+1$ болгондо $(\sqrt[n]{a})^{k+1}$ туюнтмасы эмнеге барабар болорун карап көрөлү. Бул туюнтмадан көбөйтүндүнүн натуралдык даражасынын аныктамасы боюнча:

$$(\sqrt[n]{a})^{k+1}=(\sqrt[n]{a})^k\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a}$$

келип чыгат. Алынган көбөйтүндүгө (A_1) барабардыгын жана көбөйтүндүнүн натуралдык даражасынын аныктамасын колдонсок, анда

$$\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^k\cdot a}=\sqrt[n]{a^{k+1}}$$

же

$$(\sqrt[n]{a})^{k+1}=\sqrt[n]{a^{k+1}}$$

болорун, б.а. (A_3) барабардыгы каалагандай $m=k+1$ үчүн туура экенин алабыз. Демек, математикалык индукция методунун жардамы менен (A_3) барабардыгы же натуралдык n-даражадагы арифметикалык тамырдын 3-касиети туура экендигин далилдедик.

4-касиеттин далилдөөсү. Бул касиеттин далилдөөсүн 1- жана 2-касиеттердин далилдөөсүндөй жүргүзсөк болот. Биринчиден, каалагандай $a\geq0$ үчүн арифметикалык тамырдын аныктамасынын негизинде $\sqrt[nk]{a}\geq0$, ошондой эле $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\geq0$. Натуралдык даражанын жана натуралдык даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n=(\sqrt[n]{a})^n=a\ .$$

Демек, (A_4) барабардыгы туура.

5-касиеттин далилдөөсү. Натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамырдын 4-касиетинин же (A_4) барабардыгынын оң жагы анын сол жагына барабар деп колдонсок жана натуралдык k-даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасын эстесек, анда

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}}=\sqrt[n]{a^m}$$

болот. Бул (A_5) барабардыгы туура экенин далилдейт. Эми (A_5) барабардыгын оң жагынан баштап жазсак:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

болорун алабыз.

Демек, n-даражалуу арифметикалык тамырдын 5-касиетин төмөнкүчө түшүнсөк болот. *Эгерде тамырдын көрсөткүчүн жана тамыр астындагы туюнтманын даража көрсөткүчүн бир эле натуралдык санга бөлсөк же көбөйтсөк, анда тамырдын мааниси (чоңдугу) өзгөрбөйт.*

Кээ бир китептерде 5-касиетти n-даражалуу арифметикалык тамырдын негизги касиети деп да айтып жүрүшөт.

Ошентип, биз натуралдык даражалуу арифметикалык тамырдын беш касиетин далилдедик.

Эскертүү. Биз (A_5) барабардыгын далилдөөдө (A_4) барабардыгынын оң жагы анын сол жагына барабар деген, бир караганда, өзүнөн өзү көрүнүп турган фактыны пайдаландык жана (A_5) тин оң жагы анын сол жагына барабар деп жогоруда жаздык. Бул жөп жөнөкөй факты (A_1), (A_2), (A_3) барабардыктары үчүн да туура экендигин эске салып коёлу. Бул факт бизге өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүүдө, маселелерди чыгарууда көп пайдасы тиерин көңүлгө түйүп алалы.

Эскертүү. Натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамырдын 1-касиетинен, б.а. (A_1) барабардыгынан жана натуралдык n- даражалуу арифметикалык тамырдын аныктамасынан келип чыга турган: $\sqrt[n]{a^n}=a$ ($n\geq2$, $a\geq0$) барабардыгын пайдаланып, өзгөртүп түзүүдө көп колдонула турган төмөнкү барабардыктарды алууга болот:

1) көбөйтүүчүнү тамырдын астынан чыгаруу:

$$\sqrt[n]{a^n\cdot b}=a\cdot\sqrt[n]{b}\quad(a\geq0,\ b\geq0),$$

2) көбөйтүүчүнү тамырдын астына кийирүү:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}\quad(a\geq0,\ b\geq0).$$

Мисалдар:

$$1)\ \sqrt[3]{125\cdot b}=\sqrt[3]{5^3\cdot b}=5\cdot\sqrt[3]{b}\ ;\qquad 2)\ 2\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2^5\cdot2}=\sqrt[5]{64}\ .$$

Эми (A_1)—(A_5) барабардыктарын колдонуп, жогорку эскертүүнү эске алып, айрым эсептөөлөрдү жүргүзөлү.

1-мисал. (A_1) барабардыгын колдонсок, анда

$$\sqrt[3]{1728}=\sqrt[3]{27\cdot64}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot4=12\ .$$

Биз бул учурда (A_1) барабардыгын сол жагынан оң жагына колдондук. Эми (A_1) ди оң жагынан сол жагына (жогорку эскертүүнү окунуз) колдонуп төмөнкү мисалды карап көрөлүчү.

2-мисал.

$$\sqrt[4]{\sqrt{19}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{19}+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(\sqrt{19}-\sqrt{3})(\sqrt{19}+\sqrt{3})}=\sqrt[4]{(\sqrt{19})^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\sqrt[4]{16}=2\ .$$

3-мисал. (A_2) барабардыгынын негизинде

$$\sqrt[4]{1\frac{44}{81}\cdot 5}=\sqrt[4]{\frac{125\cdot 5}{81}}=\sqrt[4]{\frac{625}{81}}=\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

болот.

4-мисал. (A_2) барабардыгын оң жагынан сол жагына колдонсок, анда

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$$

экени келип чыгат.

5-мисал. (A_3), (A_5) барабардыктарын колдонсок, анда

$$(\sqrt[6]{11})^3=\sqrt[6]{11^3}=\sqrt[2\cdot 3]{11^3}=\sqrt{11}\,.$$

6-мисал. (A_4) барабардыгынын негизинде

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{12}}}=\sqrt[4\cdot 3]{5^{12}}=\sqrt[12]{5^{12}}=5$$

болорун алабыз.

7-мисал. (A_5) барабардыгын колдонсок, анда:

а) $\sqrt[32]{3^{24}}=\sqrt[4\cdot 8]{3^{3\cdot 8}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$;

б) $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[15]{4}}=\frac{\sqrt[3\cdot 5]{4^3}}{\sqrt[15]{4}}=\frac{\sqrt[15]{64}}{\sqrt[15]{4}}=\sqrt[15]{16}$.

Бул мисалдын б) учурунда (A_2) барабардыгын колдондук.

Эскертүү. Натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамырдын касиеттери радикалдын (тамырдын) астындагы терс эмес a нын ордунда ар кандай эле терс эмес туюнтма турса да орундала берерин эске сактап коёлу.

Мисалдар:

1) Эгерде $x>y>0$ болсо, анда

$$\sqrt[3]{x-y}\cdot\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}=\sqrt[3]{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\sqrt[3]{x^3-y^3}\ ;$$

2) $\sqrt[4]{|ax+b|^3}\cdot\sqrt[4]{|ax+b|}=\sqrt[4]{|ax+b|^4}=|ax+b|$;

3) эгерде $a>0$, $b>0$ болушса, анда

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3\cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}\cdot b^6}}}=\frac{a^3\cdot b^2}{\sqrt[6]{a^{12}\cdot b^6}}=\frac{a^3\cdot b^2}{a^2\cdot b}=ab\,.$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Төмөндөгү мисалдарда, эгерде кошумча шарт коюлбаса, анда тамгалар менен оң сандар белгиленди деп түшүнгүлө.

35. Көбөйтүндүдөн тамыр чыгаргыла:

а) $\sqrt{4\cdot 9}$;   б) $\sqrt{25\cdot 64}$;

в) $\sqrt{36\cdot 49\cdot 100}$;

г) $\sqrt{144\cdot 100\cdot 4}$;

д) $\sqrt[3]{8\cdot 125}$;

е) $\sqrt[3]{216\cdot 512}$;

ж) $\sqrt[3]{27\cdot 125\cdot 64}$;

з) $\sqrt[5]{32\cdot 243}$;

и) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64\cdot 125\cdot 215\cdot 343}$;

к) $\sqrt[3]{64\cdot 0{,}125}$;

л) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0081}$;

м) $\sqrt[6]{64\cdot 729}$;

н) $\sqrt[3]{10000000000\cdot 1024}$;

о) $\sqrt[7]{128\cdot 2187\cdot 0{,}0000001}$;

п) $\sqrt[3]{0{,}008\cdot 0{,}027\cdot 1000000}$;

р) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot(\sqrt{2}+1)^2}$.

36. Бөлчөктөн тамыр чыгаргыла:

а) $\sqrt{\frac{49}{36}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$;

г) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$;

д) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$;

е) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$;

ж) $\sqrt[6]{\frac{4096}{729}}$;

з) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0625}}$;

и) $\sqrt[5]{\frac{0{,}00001}{0{,}00032}}$;

к) $\sqrt[10]{\frac{1}{0{,}0000000001}}$;

л) $\sqrt[3]{\frac{27}{0{,}064}}$;

м) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

37. Тамырды даражага көтөргүлө:

а) $(\sqrt[3]{2})^6$;

б) $(\sqrt[35]{4})^{105}$;

в) $(\sqrt[4]{|a|})^8$;

г) $(\sqrt[6]{x^2+1})^{24}$;

д) $(\sqrt[3]{3\sqrt{2}})^6$;

е) $(5\sqrt{7})^4$;

ж) $(\sqrt[5]{0{,}1})^{10}$;

з) $(\sqrt[7]{2})^{14}$.

38. Тамырдан тамыр чыгаргыла:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{12}}}$; 4

в) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{20}}}$;

д) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{b^{21}}}$;

е) $\sqrt[8]{\sqrt[5]{2^{80}}}$;

ж) $\sqrt[7]{\sqrt{16384}}$;

з) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$;

и) $\sqrt[8]{\sqrt[4]{12}}$;

к) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$;

л) $\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[4]{a}}$;

м) $\sqrt[4]{b\cdot\sqrt[5]{b^3}}$.

39. Тамыр менен тамырдын астындагы туюнтманын даража көрсөткүчтөрүн кыскарткыла:

а) $\sqrt[4]{a^6}$;

б) $\sqrt[6]{3^9}$;

в) $\sqrt{a^{2n}}$;

г) $\sqrt[3]{x^{6n}}$;

д) $\sqrt[n]{a^{3n}}$;

е) $\sqrt[k]{b^{5k}}$;

ж) $\sqrt[3k]{6^k}$;

з) $\sqrt[72]{7^{144}}$;

и) $\sqrt[45]{8^{25}}$;

к) $\sqrt[100]{4^{75}}$;

л) $\sqrt[2n]{|a|^n}$;

м) $\sqrt[31]{a^{93}}$;

н) $\sqrt[105]{a^{70}}$;

о) $\sqrt[400]{2^{300}}$;

п) $\sqrt[10]{\sqrt[5]{3^{50}}}$;

р) $\sqrt[15]{\sqrt[7]{5^{70}}}$.

40. Оозеки эсептегиле:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$;

б) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$;

в) $\sqrt[4]{1000}\cdot\sqrt[4]{10}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}0001}\cdot\sqrt[3]{10000}$;

д) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$;

е) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;

ж) $\sqrt[3]{10000}:\sqrt[3]{10}$;

з) $\sqrt[4]{243}:\sqrt[4]{3}$.

41. Оозеки эсептегиле:

а) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;

б) $\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[4]{a}$;

в) $\sqrt[3]{3a^4}:\sqrt[3]{\frac{a}{9}}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}2}:\sqrt[3]{25}$;

д) $\sqrt[6]{b^8}:\sqrt[6]{b^2}$;

е) $\sqrt[25]{2^{30}:}\sqrt[25]{2^5}$;

ж) $\sqrt[100]{5^{1001}}:\sqrt[100]{5}$.

42. Эсептегиле:

а) $\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{10}$;

б) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}$;

в) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$;

г) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$;

д) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot(\frac{1}{3})^8}$;

е) $\sqrt[7]{2^4\cdot 7^3}\cdot\sqrt[7]{8\cdot 49^2}$;

ж) $\sqrt[5]{3^2\cdot 2^3}\cdot\sqrt[5]{3^8\cdot 2^7}$;

з) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$;

и) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

к) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot(\frac{1}{2})^{10}}$.

43. Тендештикти далилдегиле:

а) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})=7$;

б) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})=1$;

в) $(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})=m-n$;

г) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=a+b$;

д) $(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{b^4})(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b})=a-b$;

е) $(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16})(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4})=6$;

ж) $(\sqrt[7]{2^6}+\sqrt[7]{2^5}+\sqrt[7]{2^4}+\sqrt[7]{2^3}+\sqrt[7]{2^2}+\sqrt[7]{2}+1)(\sqrt[7]{2}-1)=1$.

44. Эсептегиле:

а) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$;

б) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$;

в) $\sqrt[5]{256}:\sqrt[5]{8}$;

г) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$;

д) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$;

е) $\sqrt[4]{2500}:\sqrt[4]{4}$;

ж) $\sqrt[4]{3}:\sqrt[4]{48}$;   и) $\sqrt[7]{256}:\sqrt[7]{2}$;   л) $\sqrt[106]{7^{109}}:\sqrt[106]{7^3}$;
з) $\sqrt[5]{3}:\sqrt[5]{96}$;   к) $\sqrt[23]{5^{93}}:\sqrt[23]{5}$;   м) $\sqrt[3]{729}:\sqrt[3]{9}$.

45. Радикалды бирдей даражага келтирип, амалдарды аткаргыла:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$;   г) $\sqrt[5]{m^4}:\sqrt[15]{m^2}$;   ж) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}$;
б) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$;   д) $\sqrt[5]{x^2}:\sqrt[15]{x^4}$;   з) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$;
в) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt{a}$;   е) $\sqrt[12]{n^{11}}:\sqrt[4]{n^3}$;   и) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$.

46. Тамыр чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$;   г) $\sqrt[5]{a^{12}b^{18}c^{42}d^{54}}$;
б) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$;   д) $\sqrt[16]{a^{32}b^{48}c^{96}}$;
в) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}z^{30}}$;   е) $\sqrt[19]{a^{38}b^{57}c^{76}d^{95}}$.

47. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[6]{4a^2bc^9}$;   г) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab^2}}$;
б) $\sqrt[4]{3a^2b^3c}\cdot\sqrt[4]{27a^2bc^3}$;   д) $\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}$;
в) $\sqrt[4]{\frac{a^2b}{c^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2c^2}{b^5}}$;   е) $\sqrt[3]{a-b}\cdot\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$.

48. Радикалды бирдей даражага келтирип, туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$;
б) $m\cdot\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\cdot\sqrt[8]{3m^3}$;
в) $a^2b\cdot\sqrt[6]{16a^5b}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2ab}\cdot b\cdot\sqrt[3]{4ab^2}$;
г) $2m^2n\cdot\sqrt[4]{mn^3}\cdot 5mn^2\cdot\sqrt{mn}\cdot 3mn\cdot\sqrt[5]{m^3n}$;
д) $6ab\cdot\sqrt[9]{a^8b^3}:\frac{2a}{3b}\cdot\sqrt[6]{a^2b^5}$;
е) $\frac{4a^2}{15b}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-b}}:\frac{2a}{5b}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{a-b}}$, мында $a-b>0$.

49. Эсептегиле:

а) $(\sqrt[6]{7^3})^2$;   в) $(\sqrt[10]{32})^2$;   д) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$;   ж) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$;
б) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$;   г) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$;   е) $\sqrt{\sqrt{1024}}$;   з) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

50. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(\sqrt[3]{x})^6$; д) $(\sqrt{\sqrt[3]{a^2bc}})^6$;

б) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; е) $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}})^4$;

в) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$; ж) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{c}\cdot\sqrt[6]{d}\cdot\sqrt[8]{k})^{24}$;

г) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[6]{c})^{12}$; з) $(\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}})^{12}:\sqrt{a}$.

51. Сандарды салыштыргыла (микрокалькуляторду пайдаланбастан):

а) $\sqrt[3]{3}$ жана $\sqrt{2}$; в) $\sqrt[3]{2}$ жана $\sqrt[12]{45}$;

б) $\sqrt[6]{8}$ жана $\sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{5}$ жана $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}$.

52. Айырманын белгисин (микрокалькуляторду пайдаланбастан) аныктагыла:

а) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt[7]{7}-\sqrt[6]{6}$; д) $\sqrt{5}-\sqrt[8]{8}$;

б) $\sqrt[5]{5}-\sqrt[4]{4}$; г) $\sqrt[4]{10}-\sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[10]{11}-\sqrt[9]{10}$.

53. Эсептегиле:

а) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; в) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; д) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$;

б) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; е) $(\sqrt{\sqrt[3]{16}})^2$.

54. Эсептегиле:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; г) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; д) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

в) $3\cdot\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{108}-16\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{72}}$.

55. Эсептегиле:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}:\sqrt[6]{3}$; в) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})\cdot(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$;

б) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}:\sqrt[12]{7}$; г) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

56. Теңдештикти далилдегиле:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

б) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3$;

в) $\sqrt{51-4\sqrt{77}}-\sqrt{47-4\sqrt{33}}=\sqrt{3}-\sqrt{7}$;

г) $\sqrt{67-42\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}=6$.

57. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө ($a\neq b$):

а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

б) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; г) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$.

§ 5. РАЦИОНАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА

Биз жогоруда бүтүн көрсөткүчтүү даража кантип аныкталарын өткөнбүз. Маселен: $2^2=2\cdot2$, $2^3=2^2\cdot2$, $2^n=2^{n-1}\cdot2$; эгерде $a\neq0$ болсо, $a^0=1$; $3^{-5}=\frac{1}{3^5}$. Жалпы учурда: эгерде m бүтүн сан болсо ($m\in Z$), анда a^m туюнтмасы $a\neq0$ болгондо аныкталарын (мааниге ээ болорун) билебиз.

Эми сандын даража көрсөткүчү рационалдык сан болушу мүмкүнбү деген суроо туулат. Албетте, мүмкүн.

Адегенде рационалдык сан эмне экенин эске түшүрөлү. Биз, эгерде $m\in Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ жана $n\in N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ сандары болушса, анда төмөнкү бөлчөк түрүндө жазылган: $\frac{m}{n}$ саны рационалдык сан деп аталарын билебиз. Маселен: 0; $-\frac{3}{7}$; $\frac{15}{43}$; -12; 19 сандары — рационалдык сандар. Демек, рационалдык сандардын көптүгү өзүнө бүтүн сандардын көптүгүн камтыйт. Биз бүтүн көрсөткүчтүү даража кантип аныкталарын билебиз дедик. Эми рационалдык $p=\frac{m}{n}$ саны бөлчөк болгон учурда:

а) берилген $a\in R=(-\infty,\infty)$ санынын бөлчөк даражасы кантип аныкталат?

б) каалагандай эле a саны үчүн анын бөлчөк даражасы аныктала береби?— деген суроолорго жооп издейли. Оболу мисалдарга кайрылалы.

1-мисал. $\sqrt[3]{4^{12}}=\sqrt[3]{(4^4)^3}=4^4$. Биз муну натуралдык n-даражалуу тамырдын аныктамасы менен эле таптык, анткени $(4^4)^3=4^{12}$. Бул мисалда бир эске ала турган нерсе: $4=\frac{12}{3}$ же тамыр астындагы сандын даражасы 12ни тамырдын даражасы 3кө бөлсөк да, натыйжада $\sqrt[3]{4^{12}}=4^{\frac{12}{3}}=4^4$ болмок.

2-мисал. $\sqrt[3]{4^{-12}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4^{12}}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4^{12}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(4^4)^3}}=\frac{1}{4^4}$.

Бул учурда натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамырдын 2-касиетин жана анын аныктамасын пайдаландык. Жогорку мисалдагыдай эле талдоо жүргүзүп: $\sqrt[3]{4^{-12}}=4^{-\frac{12}{3}}=4^{-4}=\frac{1}{4^4}$ болорун байкайбыз.

3 - мисал. $m\in Z$ жана $m=n\cdot k$, $n\in N$, $k\in Z$ болсун дейли. Анда $a>0$ үчүн

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{n\cdot k}}=a^k$$

болот. Демек, бул учурда да

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{n\cdot k}{n}}=a^k$$

болду. Мындан төмөнкү эрежени алабыз:

Эгерде $n\geq 2$ — натуралдык, ал эми m — бүтүн сан болушса жана $\frac{m}{n}$ бөлчөгү бүтүн санды берсе, анда каалагандай $a>0$ үчүн:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad (*)$$

барабардыгы орун алат.

Эгерде $\frac{m}{n}$ бөлчөгү бүтүн санды бербесе, анда да $a>0$ болгондо $a^{\frac{m}{n}}$ даражасын (*) барабардыгы туура боло турган кылып аныкташат.

1-аныктама. **Эгерде a — оң сан, $\frac{m}{n}$ — бөлчөк сан ($m\in Z$, $n\in N$, $m\geq 2$) болсо, анда**

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,. \qquad (**)$$

Мында a — негизи, $\frac{m}{n}$ бөлчөгү — даража көрсөткүч деп аталат.

Демек, (**) формуласы менен оң сандын каалагандай бөлчөк (рационалдуу) даражасы аныкталат. Эгерде даража $\frac{m}{n}>0$ (оң) болсо, анда (**) барабардыгы $a=0$ болгон учурда да аныкталат:

$$\sqrt[n]{0^m}=0^{\frac{m}{n}}=0\,.$$

Эскертүү. Бөлчөк көрсөткүчтүү даража $a<0$ болгондо (б.а. терс негиздер үчүн) каралбайт жана ошондой эле $a=0$ учурунда даража көрсөткүч терс боло албайт. Маселен,

$$(-2)^{\frac{3}{4}},\ (-5)^{-\frac{7}{10}},\ 0^{-\frac{1}{2}}$$

туюнтмаларына окшогон туюнтмалар аныкталышпайт (анык мааниге ээ болушпайт). Себеби,

$$(-2)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(-2)^3}=\sqrt[4]{-8}\,,$$

$$(-5)^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[7]{1} : (-5)^{\frac{7}{10}} = 1 : \sqrt[10]{(-5)^7} = 1 : \sqrt[10]{-5^7}$$

туюнтмаларына туура келүүчү n-даражалуу анык тамырлар жок. Ал эми $0^{-\frac{1}{2}}$ деген нөлгө бөлүүгө болбойт дегенди билдирет.

Дагы бир эске салчу нерсе: (*) жана (**) формулаларын пайдаланып, тамырды (радикалды) рационалдык даража түрүндө жана рационалдык даражаны тамыр (радикал) түрүндө жазууга болот.

Мисалдар:

1) $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$;

2) $\sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-\frac{6}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

3) $7^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{7^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{7^3}} = 1:7\sqrt{7}$;

4) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$;

5) $27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{3^6} = 1:3^2 = 1:9 = \frac{1}{9}$;

6) $9^{1,2} = 9^{\frac{12}{10}} = 9^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{9^6} = \sqrt[5]{9^5 \cdot 9} = 9 \cdot \sqrt[5]{9}$.

Жогорудагы 6)-мисалды караганда көрдүк жана ошондой эле натуралдык n-даражалуу тамырдын 5-касиетин же (A_5) барабардыгын эстесек, анда (**) формуласынан төмөнкү барабардыкка келебиз:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}, \qquad (***)$$

мында $a>0$, m — бүтүн, ал эми n жана k — натуралдык сандар.

Мисалы, $5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{6}{8}} = 5^{\frac{9}{12}}$.

Бөлчөк даражанын бул (***) барабардыгы менен аныкталган касиетин анын ***негизги*** касиети деп коюшат жана ал төмөнкүчө окулат: Эгерде бөлчөк даража көрсөткүчтүн алымын жана бөлүмүн натуралдык санга көбөйтсөк, анда даража көрсөткүчтүн чоңдугу өзгөрбөйт.

Бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын бул касиети: бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн нөлгө барабар эмес санга көбөйтсөк, анда бөлчөктүн чоңдугу өзгөрбөйт деген касиеттен келип чыгат.

Бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын бул негизги касиети кийинки параграфтагы рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин далилдөөдө колдонуларын эстеп коёлу.

Эскертүү. Бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын бул негизги касиети (***) $a>0$ болгондо гана орун аларын эскерте кетели. Эгерде $a<0$ болгондо (***) барабардыгын колдонсок, анда «софистикалык» (туура эмес) жыйынтыктарга келмекпиз. Мисалы: $(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$, $(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1$. Мындан $-1=1$ деген софизм келип чыгат. Албетте, $-1=1$ деген туура эмес. Демек, терс негиздер үчүн бөлчөк көрсөткүчтүү даража каралбайт дегенибиз жөндүү экенин далилдей турган мисалдардын бири ушул. Мындан биз: «эмне үчүн бөлчөк көрсөткүчтүү даража терс негиздер үчүн каралбай тургандыгын» түшүнүүгө (***) барабардыгы мүмкүнчүлүк берет деген жыйынтыкка келебиз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Төмөндөгү көнүгүүлөрдө, эгерде кошумча шарт коюлбаса, анда тамгалар менен оң сандар белгиленди деп түшүнөлү.

58. Бөлчөк көрсөткүчтүү даражаны тамыр менен алмаштыргыла:

а) $7^{\frac{3}{5}}$;
б) $5^{\frac{1}{7}}$;
в) $6^{-\frac{1}{3}}$;
г) $10^{-0,5}$;
д) $2{,}5^{-\frac{2}{3}}$;
е) $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}$;
ж) $0{,}5^{0,5}$;
з) $a^{0,5}$;
и) $b^{0,6}$;
к) $c^{1,4}$;
л) $3x^{\frac{1}{3}}$;
м) $(3x)^{\frac{1}{2}}$;
н) $\frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}}$;
о) $-y^{\frac{2}{3}}$;
п) $(ab)^{\frac{2}{3}}$;
р) $ab^{\frac{2}{3}}$;
с) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$;
т) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$;
у) $xy^{-1,5}$;
ф) $4(x-y)^{-1,5}$;
х) $2x(x+y)^{-\frac{1}{8}}$;
ц) $(abc)^{\frac{5}{6}}$;
ч) $a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{5}{6}}\cdot c^{\frac{5}{6}}$;
ш) $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$;
щ) $(\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}$;
э) $(x+y)^{\frac{3}{5}}$;
ю) $(3{,}8)^{1,8}$;
я) $(2b)^{1,8}$.

59. Арифметикалык тамырды бөлчөк көрсөткүчтүү даража түрүндө жазгыла:

а) $\sqrt{11}$;
б) $\sqrt[3]{129^7}$;
в) $\sqrt[5]{\frac{3}{11}}$;
г) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^{-2}}}$;
д) $\sqrt[9]{|x|+1}$;
е) $\sqrt[6]{0{,}1}$;
ж) $\sqrt[7]{73^3}$;
з) $\sqrt[6]{77^3}$;
и) $\sqrt[8]{2^{-3}}$;
к) $\sqrt[8]{2(a^2+b^2)}$;
л) $\sqrt[13]{|x|+|y|+5}$;
м) $\sqrt[11]{12^{10}}$.

60. Арифметикалык тамырды бөлчөк көрсөткүчтүү даража түрүндө жазгыла:

а) $\sqrt[4]{17^2}$; б) $\sqrt[5]{3^6}$; в) $\sqrt[8]{7^{-5}}$; г) $\sqrt[9]{0{,}125^2}$;

д) $\sqrt[7]{a^4}$; ж) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; и) $\sqrt[31]{a-b}$;

е) $\sqrt[8]{a^9}$; з) $\sqrt[11]{5c^2}$; к) $\sqrt[103]{a^3}$.

61. Эсептегиле:

а) $1000^{\frac{1}{3}}$; г) $0^{\frac{5}{7}}$; ж) $64^{-\frac{1}{6}}$; к) $(0{,}0625)^{-0{,}75}$;

б) $(0{,}01)^{\frac{1}{2}}$; д) $8^{1\frac{1}{3}}$; з) $81^{\frac{3}{4}}$; л) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}$;

в) $8^{-\frac{1}{3}}$; е) $(3\frac{8}{3})^{-\frac{2}{3}}$; и) $(0{,}25)^{-\frac{3}{2}}$; м) $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$.

62. Эсептегиле:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; д) $25^{\frac{1}{2}}$; и) $(961)^{\frac{1}{2}}$;

б) $25^{-\frac{1}{2}}$; е) $32^{-\frac{2}{5}}$; к) $6561^{\frac{3}{4}}$;

в) $(0{,}16)^{\frac{3}{2}}$; ж) $(0{,}64)^{-1{,}5}$; л) $343^{\frac{2}{3}}$;

г) $(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$; з) $(0{,}008)^{1\frac{1}{3}}$; м) $(0{,}00032)^{-\frac{1}{5}}$.

63. Төмөнкү туюнтма мааниге ээ болобу?:

а) $2^{-\frac{1}{10}}$; в) $(-2)^{\frac{2}{3}}$; д) $0^{-\frac{4}{7}}$;

б) $(-5)^{\frac{5}{8}}$; г) $0^{\frac{2}{9}}$; е) $(-10)^{\frac{3}{22}}$.

64. Өзгөрүлмөнүн кайсы маанилеринде төмөнкү туюнтма аныкталат:

а) $x^{\frac{1}{2}}$; г) $(a+3)^{\frac{4}{5}}$; ж) $(x^2+1)^{\frac{7}{8}}$;

б) $(x-1)^{\frac{1}{3}}$; д) $b^{-\frac{4}{7}}$; з) $(y^2+5)^{-\frac{1}{9}}$;

в) $(x^2-1)^{\frac{3}{4}}$; е) $(c-5)^{-\frac{1}{3}}$; и) $(y-4)^{-\frac{1}{8}}$?

65. Эгерде: а) $0<x<1$; б) $1<x<64$; в) $64<x<1000000$ болсо, анда $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$ жана $x^{\frac{1}{6}}$ туюнтмаларынын маанилерин салыштыргыла.

66. Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y=x^{\frac{1}{2}}$; б) $y=x^{\frac{1}{3}}$; в) $y=x^{\frac{1}{4}}$.

67. Төмөндө * нын ордуна > же < белгисин койгула:

а) $2^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{2}}$; в) $0{,}3^{\frac{1}{2}} * 0{,}5^{\frac{1}{2}}$; д) $4^{\frac{1}{4}} * 5^{\frac{1}{5}}$;

б) $(0{,}1)^{-\frac{1}{2}} * (0{,}1)^{-\frac{1}{3}}$; г) $7^{\frac{1}{3}} * 7^{\frac{2}{6}}$; е) $7^{\frac{1}{7}} * 8^{\frac{1}{8}}$.

§ 6. РАЦИОНАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖАНЫН КАСИЕТТЕРИ

Биз рационалдык көрсөткүчтүү даражанын (***) барабардыгы менен аныкталган бир (негизги) касиетине токтолуп өттүк. Эми анын дагы кандай касиеттери бар деген суроого жооп берели.

Бүтүн көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттери оң негиздүү каалагандай рационалдык көрсөткүчтүү даража үчүн да туура болорун көрсөтүүгө болот. Адегенде аларды келтирели.

Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттери төмөнкүлөр:

Каалагандай $a>0$ жана каалагандай рационалдык p жана q сандары үчүн:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad (P_1)$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}, \qquad (P_2)$$

$$(a^p)^q = a^{pq}. \qquad (P_3)$$

Каалагандай $a>0$, $b>0$ жана каалагандай рационалдык p сандары үчүн:

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad (P_4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \qquad (P_5)$$

барабардыктары орун алат.

Биз жогоруда (***) барабардыгын же рационалдык көрсөткүчтүү даражанын негизги касиетин анын калган касиеттерин далилдөөдө колдонобуз деген элек.

(P_1) барабардыгын далилдөөдөн мурда бир мисал карап көрөлү.

Мисал. Каалагандай $a>0$ саны үчүн $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{2}{3}$ болсун жана $a^p \cdot a^q$ эмнеге барабар экенин табуу талап кылынсын дейли. Оболу $\frac{3}{4}$ жана $\frac{2}{3}$ бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтирели: $\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$, $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$. Анда

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{9}{12}} \cdot a^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{a^9 \cdot a^8} = \sqrt[12]{a^{8+9}} = a^{\frac{9+8}{12}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}$$

болот же (P_1) барабардыгы биздин мисал үчүн туура. Биз бул учурда (**) формуласын, n-даражалуу арифметикалык тамырдын 1-касиетин же (A_1) барабардыгын, натуралдык даражанын касиетин, анан (*) формуласын пайдаландык.

Ушундай эле мисалдарды (P_2)—(P_5) барабардыктарын текшерүүгө да келтирсе болот. Мисалдарды коё туруп, (P_1)—(P_5) барабардыктарынын далилдөөлөрүн келтирели.

(P_1) барабардыгынын далилдөөсү. Бизге p, q рационалдык сандары берилсин жана $p=\frac{m}{n}$, $m\in Z$, $q=\frac{r}{k}$, $r\in Z$, $k\in N$ болушсун дейли. Анда биз (P_1) барабардыгын же $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{k}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{k}}$ экенин далилдешибиз керек. Жогорудагы (***) барабардыгын пайдаланып, $\frac{m}{n}$ жана $\frac{r}{k}$ бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтирип жаза алабыз: $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{k}}=a^{\frac{mk}{nk}}\cdot a^{\frac{nr}{nk}}$. Алынган көбөйтүндүнү (**) формуласынын негизинде натуралдык nk-даражалуу тамыр түрүндө жазып, анан натуралдык көрсөткүчтүү арифметикалык тамырдын (A_1) формуласын, бүтүн көрсөткүчтүү даражалардын көбөйтүндүсүнүн формуласын жана (*) формуласын колдонуп:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{k}}=a^{\frac{mk}{nk}}\cdot a^{\frac{nr}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}\cdot\sqrt[nk]{a^{nr}}=\sqrt[nk]{a^{mk}\cdot a^{nr}}=\sqrt[nk]{a^{mk+nr}}=a^{\frac{mk+nr}{nk}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{k}}$$

экенин же (P_1) барабардыгынын тууралыгын көрөбүз.

(P_2) барабардыгынын далилдөөсү. Жогорудагыдай эле $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{r}{k}$ болсун дейли. Анда (***) барабардыгын, (**) формуласын, натуралдык nk-даражалуу арифметикалык тамырга (A_2) формуласын, бүтүн көрсөткүчтүү даражалардын тийиндисинин формуласын жана (*) формуласын колдонсок:

$$\frac{a^p}{a^q}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{k}}}=\frac{a^{\frac{mk}{nk}}}{a^{\frac{nr}{nk}}}=\frac{\sqrt[nk]{a^{mk}}}{\sqrt[nk]{a^{nr}}}=\sqrt[nk]{\frac{a^{mk}}{a^{nr}}}=\sqrt[nk]{a^{mk-nr}}=a^{\frac{mk-nr}{nk}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{k}}=a^{p-q}$$

болорун же (P_2) барабардыгынын туура экендигин алабыз.

(P_3) барабардыгынын далилдөөсү. Жогорудагыдай эле $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{r}{k}$ болсун. Анда каалагандай $a>0$ үчүн $(a^p)^q=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{r}{k}}$ деп жазып, анан (**) формуласын, натуралдык n-даражалуу арифметикалык тамырдын (A_3), (A_4) формулаларын, бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиетин, (*) формуласын пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(a^p)^q=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{r}{k}}=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{r}{k}}=\sqrt[k]{(\sqrt[n]{a^m})^r}=\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{mr}}}=\sqrt[nk]{a^{mr}}=a^{\frac{mr}{nk}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{k}}=a^{pq}.$$

Демек, (P_3) барабардыгы туура.

Эскертүү. Биз бул учурда каалагандай $r\in Z$ үчүн:

$$(\sqrt[n]{a^m})^r=\sqrt[n]{(a^m)^r}=\sqrt[n]{a^{mr}}$$

болорун пайдаландык. Чындыгында эле бул барабардык туура, анткени:

1) эгерде $r=0$ болсо, анда $1=1$ болот;

2) эгерде $r \geq 1$ болсо, анда $r=1$ үчүн туура экени көрүнүп эле турат, ал эми $r>2$ үчүн (A_3) формуласы орун алат;

3) эгерде $r=-l$, $l \in N$ болсо, анда

$$(\sqrt[n]{a^m})^{-l} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a^m})^l}$$

болот да, андан ары 2) учурундай эле болот.

(P_4) барабардыгынын далилдөөсү. Бизге каалагандай $a>0$, $b>0$ сандары жана каалагандай рационалдык p саны берилсин жана $p=\frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$ болсун дейли. Анда (**) формуласын жана бүтүн көрсөткүчтүү даражалардын көбөйтүндүсүнүн, n-даражалуу арифметикалык тамырдын (A_1) формуласын жана (*) формуласын пайдалансак:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p \cdot b^q$$

болот. Демек, $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.

(P_5) барабардыгынын далилдөөсү. Жогорудагыдай эле $p = \frac{m}{n}$ болсун. Анда каалагандай $a>0$, $b>0$ сандары үчүн (**) формуласын, бөлчөктүн бүтүн көрсөткүчтүү даражасынын формуласын, n-даражалуу арифметикалык тамырдын (A_2) формуласын жана (*) формуласын колдонсок, анда:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^p}{b^q}$$

болорун же (P_5) барабардыгы туура экенин алабыз.

Эскертүү. $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ ($a>0$, $b>0$) деп жазып алып, (P_5) барабардыгынын далилдөөсүн (P_4) барабардыгын пайдаланып далилдесе да болот.

Эстеп коёлу: 1) (P_1) формуласынан a — каалагандай он жана p — каалагандай рационалдык сан болгондо:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

болору келип чыгат, анткени $a^{-p} \cdot a^p = a^0 = 1$.

2) (P_3) формуласынан p — каалагандай рационалдык жана n — каалагандай натуралдык сан болгондо, каалагандай $a>0$ үчүн:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

барабардыгы алынат, себеби (*) жана (P_3) формулалары боюнча:

$$\sqrt[n]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{n}} = a^{p \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Демек, $n \in N$, $m \in Z$ болгондо каалагандай $a>0$ саны үчүн:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{(a)^m} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} .$$

Бул келтирилген барабардыктар жөнөкөй (биз аларды жогоруда өткөнбүз), бирок көп колдонулат, ошон үчүн дагы бир жолу кайталап жатабыз.

Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин колдонууга мисалдар келтирели.

1 - мисал. Эсептегиле:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7$;

2) $4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

3) $(49^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{4}} = 49^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 49^{\frac{3}{4}} = (7^2)^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{3}{2}} = 7^{1+\frac{1}{2}} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{7}$;

4) $128^{\frac{2}{3}} = (64 \cdot 2)^{\frac{2}{3}} = (4^3 \cdot 2)^{\frac{2}{3}} = 4^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 16\sqrt[3]{4}$;

5) $(\frac{81}{625})^{\frac{1}{4}} = \dfrac{81^{\frac{1}{4}}}{625^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{(3^4)^{\frac{1}{4}}}{(5^4)^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{3}{5}$.

2 - мисал. Эсептегиле:

$$25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^2 \cdot 5^3)^{\frac{1}{5}} = 5^{5\cdot\frac{1}{5}} = 5 .$$

3 - мисал. Жөнөкөйлөткүлө:

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab .$$

4 - мисал. Жөнөкөйлөткүлө:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{1}{a^2}}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{a}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{1} = 1 .$$

5 - мисал. Жөнөкөйлөткүлө:

1) $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt{m}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{m^3 \cdot m \cdot \sqrt{m}}} = \sqrt[9]{\sqrt{m^8 \cdot m}} = \sqrt[18]{m^9} = m^{\frac{9}{18}} = m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}$;

2) $\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^9 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}}} = \sqrt[12]{\sqrt{x^{22} \cdot x}} = \sqrt[24]{x^{23}}$.

Эскертүү. Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын биз далилдеген 5 касиети же (P_1)–(P_5) барабардыктары (формулалары десек да болот) $a>0$ санынын ордуна каалагандай оң туюнтма турса деле туура боло берет.

Мисалдар:

1) $(a^2+x^2+1)^{\frac{3}{5}}\cdot(a^2+x^2+1)^{\frac{2}{5}}=(a^2+x^2+1)^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}=1+a^2+x^2$.

2) $x>y>0$ болгондо:

$$\frac{(x-y)^{\frac{1}{4}}\cdot(x+y)^{\frac{1}{4}}}{(x^6-y^6)^{\frac{1}{4}}}=\frac{[(x-y)\cdot(x+y)]^{\frac{1}{4}}}{(x^6-y^6)^{\frac{1}{4}}}=\frac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^6-y^6)^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{x^2-y^2}{x^6-y^6}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{(x^4+x^2y^2+y^4)^{\frac{1}{4}}}=(x^4+x^2y^2+y^4)^{-\frac{1}{4}}.$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Төмөндөгү көнүгүүлөрдө, эгерде кошумча шарт коюлбаса, анда тамгалар (өзгөрүлмөлөр) менен оң сандар белгиленди деп түшүнгүлө.

68. (*Оозеки*). Рационалдык көрсөткүчтүү даража түрүндө көрсөткүлө:

а) $\sqrt{x^3}$; г) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; ж) $\sqrt[10]{5^{30}}$; к) $\sqrt[113]{7^{339}}$;

б) $\sqrt[3]{a^4}$; д) $\sqrt[6]{a}$; з) $\sqrt[11]{4^{22}}$; л) $\sqrt[333]{8^{999}}$;

в) $\sqrt[4]{b^3}$; е) $\sqrt[7]{b^{-3}}$; и) $\sqrt[33]{3^{100}}$; м) $\sqrt[9]{10^{10}}$.

69. (*Оозеки*). Бүтүн көрсөткүчтүү даражанын тамыры (радикалы) түрүндө көрсөткүлө:

а) $x^{\frac{1}{4}}$; в) $a^{-\frac{5}{6}}$; д) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; ж) $2^{\frac{3}{4}}$; и) $6^{-1\frac{1}{4}}$;

б) $y^{\frac{2}{5}}$; г) $b^{-\frac{1}{3}}$; е) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$; з) $9^{1\frac{2}{3}}$; к) $3^{\frac{7}{100}}$.

70. Эсептегиле:

а) $2^{\frac{4}{5}}\cdot2^{\frac{11}{5}}$; в) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; д) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; ж) $3^{\frac{4}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}}\cdot3^{-2}$;

б) $5^{\frac{2}{7}}\cdot5^{\frac{5}{7}}$; г) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$; е) $(8^{\frac{1}{12}})^{-4}$; з) $5^{\frac{1}{16}}\cdot5^{\frac{5}{16}}\cdot5^{\frac{1}{4}}$.

71. Эсептегиле:

а) $9^{\frac{2}{5}}\cdot27^{\frac{2}{5}}$; г) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$; ж) $12^{-\frac{31}{4}}:3^{\frac{4}{31}}\cdot2^{\frac{2}{31}}$;

б) $7^{\frac{2}{3}}\cdot79^{\frac{2}{3}}$; д) $961^{\frac{2}{3}}:31^{\frac{1}{3}}$; з) $25^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{3}}$;

в) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; е) $8^{\frac{2}{7}}:8^{-\frac{7}{2}}$; и) $343^{\frac{1}{2}}:7^{\frac{1}{2}}$.

72. Эсептегиле:

а) $(\frac{1}{16})^{-0,75}+(\frac{1}{8})^{-\frac{4}{3}}$;

б) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

в) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$;

г) $(5^{-\frac{2}{5}})^{-5}+((0,2)^{\frac{3}{4}})^{-4}$;

д) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{-0,25}\cdot 5^{\frac{4}{5}}\cdot 5^{-0,75}$;

е) $9^{-\frac{4}{3}}:27^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$;

ж) $(27^{3}:125^{6})^{\frac{1}{9}}$;

з) $(0,1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(0,01)^{-\frac{1}{3}}$.

73. Эсептегиле:

а) $2^{1,3}\cdot 2^{-0,7}\cdot 2^{1,4}$;

б) $4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}$;

в) $25^{0,3}\cdot 5^{1,4}$;

г) $7^{-1\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{12}}\cdot 7^{-\frac{3}{4}}$;

д) $3^{2\frac{1}{4}}\cdot 27^{-\frac{3}{4}}$;

е) $3^{\frac{4}{3}}\cdot 9^{2}\cdot 27^{-\frac{5}{6}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}$;

ж) $5^{\frac{4}{5}}\cdot 125\cdot 25^{-0,4}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

з) $(10^{5})^{0,2}\cdot(0,001)^{\frac{1}{3}}$.

74. Эгерде:

а) a=0,09 болсо, анда $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=?$

б) b=27 болсо, анда $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}=?$

в) b=1,3 болсо, анда $\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b^{2}}:\sqrt[6]{b}=?$

г) a=2,7 болсо, анда $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^{5}}=?$

75. Рационалдык көрсөткүчтүү даража түрүндө көрсөткүлө:

а) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$;

б) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$;

в) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

г) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$;

д) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}\cdot\sqrt{x^{5}}$;

е) $y^{-3,8}:y^{-2,3}\cdot\sqrt{y^{3}}$;

ж) $a^{2}x:\sqrt[3]{ax^{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$;

з) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}$;

и) $\sqrt[5]{x^{2}\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}$.

76. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(125x^{6})^{-\frac{2}{3}}$;

б) $(x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$;

в) $(a^{\frac{1}{4}})^{-\frac{1}{2}}$;

г) $a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}\cdot(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}})^{4}$;

д) $(a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{2}{3}})^{1\frac{1}{5}}\cdot a^{0,7}\cdot x^{0,8}$;

е) $(c^{-\frac{3}{7}}\cdot y^{-0,4})^{3}\cdot c^{\frac{2}{7}}\cdot y^{0,2}$;

ж) $a^{-1}\cdot b^{\frac{5}{4}}(a^{-\frac{2}{7}}\cdot b^{\frac{1}{41}})^{-3,5}$;

з) $(a^{-2}+2a^{-1}+a^{0})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a+1)$.

77. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(a^{4})^{-\frac{3}{4}}\cdot(b^{-\frac{2}{3}})^{-6}$;

б) $\left((\frac{a^{6}}{b^{-3}})^{4}\right)^{\frac{1}{12}}$;

в) $\left(\sqrt{x^{0,4}\cdot y^{1,2}}\right)^{10}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\cdot(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}\cdot(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})}$;

д) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\cdot(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}\cdot(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}})}$, $b\neq 1$;

е) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$, $a\neq b$;

ж) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$;

з) $\dfrac{-4a\sqrt{a^2+1}}{(a^4+a^2)^{\frac{1}{2}}}$, $a<0$.

78. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $a^{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[6]{a\cdot\sqrt[3]{a}}$;

б) $b^{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$;

в) $(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}})\cdot\sqrt[6]{ab^4}$;

г) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab})$;

д) $\left[(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[(\frac{1}{ab})^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right]:\dfrac{a^{\frac{5}{4}}+(a^4b)^{\frac{1}{4}}}{a-b}$, $a>b$.

79. Эсептегиле:

а) $(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}})\cdot\sqrt[3]{6}$;

б) $(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}})\cdot\sqrt[4]{1000}$;

в) $((0,5)^{\frac{3}{5}})^{-5}-(4^{-0,3})^{-\frac{5}{3}}$;

г) $(0,027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+5,5^0$.

80. Эгерде $x>a>0$ болсо, анда $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=1$ экенин далилдегиле.

81. Төмөндө $x>0$, $y>0$; x ти y аркылуу туюнткула:

а) $y=x^{\frac{1}{3}}$; в) $y=x^{-\frac{3}{2}}$; д) $y=x^{\frac{4}{7}}$; ж) $y=0,3\cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

б) $y=x^{\frac{2}{3}}$; г) $y=5x^{\frac{4}{5}}$; е) $y=x^{-0,125}$; з) $y=x^{0,001}$.

82. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\left[(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})^{-1}(a-x)-\dfrac{a+x}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\right]\cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$, $a>x>0$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[3]{a}}}-1$;

в) $3-\dfrac{\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt{a}}}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

83. Эгерде $(4{,}31)^{\frac{1}{2}}=\alpha$ экени белгилүү болсо, анда:

а) $431^{\frac{1}{2}}=?$;

б) $43100^{\frac{1}{2}}=?$;

в) $(0{,}0431)^{\frac{1}{2}}=?$;

г) $(0{,}000431)^{\frac{1}{2}}=?$;

д) $431^{-\frac{1}{2}}=?$;

е) $(43{,}1)^{\frac{1}{4}}=?$;

ж) $(4{,}31)^{\frac{4}{5}}=?$;

з) $(4{,}31)^{-\frac{3}{2}}=?$.

84. Кубдун көлөмү V га барабар болсо, анда:

а) кубдун кыры a нын маанисин,

б) кубдун бир гранынын аянтын,

в) кубдун толук бетинин аянтын тапкыла.

85. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^{\frac{1}{2}}=5$;

б) $x^{\frac{2}{3}}=4$;

в) $x^{1{,}5}=27$;

г) $x^{0{,}75}=2$;

д) $x^{-0{,}8}=16$;

е) $x^{\frac{4}{15}}\cdot x^{\frac{11}{15}}=-4$;

ж) $(x+1)^{\frac{1}{4}}=3$;

з) $(x^3+5)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{32}$;

и) $(x-1)^{\frac{1}{5}}=-2$.

Бизге жогорудагы көнүгүүлөрдөн белгилүү болгондой, рационалдык (бөлчөк) көрсөткүчтүү даражаларды камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүү талап кылынчу маселелерди көп, көп чыгарууга туура келет. Бул үчүн бизден, негизинен, төмөнкүлөр талап кылынат:

1) рационалдык көрсөткүчтүү даражанын аныктамасын билүү;

2) рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин билүү;

3) көбөйтүүнүн, бөлүүнүн, кошуунун, кемитүүнүн, даражанын, тамыр чыгаруунун закондорун билүү;

4) кыскача көбөйтүүнүн формулаларын билүү;

5) бөлчөктөр (ондук, аралаш, буруш, дурус) менен жүргүзүлүүчү амалдарды аткара алуу;

6) туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажырата алуу;

7) жалпы көбөйтүүчүнү кашаанын сыртына чыгаруу жана кашаанын ичине кийирүү;

8) бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн нөлгө барабар эмес санга же туюнтмага көбөйтсөк да, бөлсөк да бөлчөктүн чоңдугу өзгөрбөстүгүн билүү;

9) көп мүчөлөр менен жүргүзүлүүчү арифметикалык амалдарды аткара алуу.

Айрым мисалдарга токтололу.

6 - мисал. Эгерде $a>0$, $b>0$ болсо, анда $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ туюнтмасын көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиети боюнча $\sqrt{a}=(\sqrt[4]{a})^2$, $\sqrt{b}=(\sqrt[4]{b})^2$. Эми кыскача көбөйтүүнүн $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ формуласын колдонсок, анда

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a})^2-(\sqrt[4]{b})^2=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$$

болот.

7 - мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad a\neq b.$$

Кыскача көбөйтүүнүн

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y) \text{ жана } x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

формулаларын $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$ деп пайдалансак, анда

$$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}), \; a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

болот. Эми $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$ экенин эске алсак, берилген туюнтмадан: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=2\cdot\sqrt[3]{b}$ келип чыгат.

Жообу: $2\cdot\sqrt[3]{b}$.

Дагы бир керектүү нерсе — бөлчөктүн бөлүмүн радикалдан (иррационалдуулуктан) бошотуу. Бөлчөк туюнтмаларды өзгөртүп, түзүүдө кээде бөлчөктүн бөлүмү радикалды кармабай турган түргө келтирүүгө туура келет. Мында бизге кыскача көбөйтүүнүн формулаларын билүү пайдалуу.

8 - мисал. Төмөнкү туюнтманы $\sqrt{3}=1{,}732$ жана $\sqrt{2}=1{,}414$ деп алып эсептегиле: $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Биз $\sqrt{3}$ менен $\sqrt{2}$ нин берилген сан маанилерин бөлчөккө коюп чыгарсак деле болот. Бирок, биз башкача жол менен чыгаралы. Берилген бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ге көбөйтөлү. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3-2=1$ экенин эске алсак, анда $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ни алабыз. Биз бөлчөктүн бөлүмүн радикалдан бошоттук. Эми эсептей берсек болот: $\sqrt{3}+\sqrt{2}=1{,}732+1{,}414=3{,}146$.

Жообу: 3,146.

Бул мисалдагы $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ үчүн $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ туюнтмалары «түйүндөш» деп аталышат. Дегеле радикалды камтыган көп мүчөнү көбөйткөндө радикалдан бошото турган туюнтманы анын түйүндөшү деп атайбыз.

Маселен, эгерде $a>0$, $b>0$ болсо, анда:

1) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ нын түйүндөшү: $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ (жогорку 7-мисалда биз муну пайдалангандай болдук);

2) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ нын түйүндөшү: $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$;

3) $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}$ түн түйүндөшү: $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ болот.

9-мисал. Туюнтманын бөлүмүн радикалдардан (иррационалдуулуктан) бошоткула:

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}\,.$$

Адегенде бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн: $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$ ге көбөйтөлү, анда

$$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{15}+1}\,.$$

Эми бул бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $2\sqrt{15}-1$ ге көбөйтөбүз да, өзгөртүүлөрдөн кийин

$$A=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})\cdot(2\sqrt{15}-1)}{59}$$ экенин алабыз.

Эскертүү. Бул сыяктуу көнүгүүлөрдү аткарууда биз адегенде бөлүмүн бир радикалдан бошотуп алсак деле болмок. Маселен, жогорку мисалда A нын алымын жана бөлүмүн $\sqrt{3}$ кө көбөйтсөк, анда

$$A=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$$

болот. Андан ары A нын алымын жана бөлүмүн $3+\sqrt{15}-\sqrt{21}$ ге көбөйтүп, жогорку мисалдагы сыяктуу эле өзгөртүүлөрдү жүргүзүп, жогорудагыдай эле натыйжага келебиз.

Эстеп коёлу. Эгерде радикалды өзүнө камтыган эки туюнтманы бири бирине көбөйтүүдөн радикалы жок туюнтма алынса, анда бул эки туюнтма өз ара *түйүндөш* туюнтмалар деп аталышат.

Бөлчөктүн бөлүмүндөгү радикалды жоготуунун кээ бир формулаларын келтире кетели:

1) $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b},\ \ b>0$;

2) $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a}{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}},\ \ b>0$;

3) $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a}{b-c}\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})$, $b>0,\ c>0,\ b\neq c$;

4) $\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\frac{a}{b^2-c}\cdot\sqrt{(b^2-c)(b-\sqrt{c})}$, $c>0,\ b^2-c>0$;

5) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{b\pm c}\cdot(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})$, $b\neq c$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Төмөндөгү көнүгүүлөрдө, эгерде кошумча шарт коюлбаса, анда тамгалар менен оң сандар белгиленди деп түшүнгүлө.

86. Амалдарды аткаргыла:

а) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})$; д) $(a^{\frac{2}{3}}-1)\cdot(a^{\frac{1}{3}}+2)$;

б) $(a^{\frac{1}{2}}-3)\cdot(a^{\frac{1}{2}}+3)$; е) $(x^{-\frac{3}{4}}+2)\cdot(x^{-\frac{1}{4}}-3)$;

в) $c^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(c^{\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}})$; ж) $(x^{\frac{1}{2}}+1)\cdot(x-x^{\frac{1}{2}}+1)$;

г) $(1+x^{\frac{1}{3}})^3$; з) $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^2$.

87. Амалдарды аткаргыла:

а) $(1-b^{\frac{1}{2}})^2+2\sqrt{b}$; д) $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\cdot(x^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$;

б) $(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}})^2$; е) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})\cdot(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)$;

в) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}(b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{4}})$; ж) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

г) $(2-y^{1,5})\cdot(2+y^{1,5})$; з) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-a^2-b^2$.

88. Амалдарды аткаргыла:

а) $\sqrt{m}+\sqrt{n}-(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}})^2$; д) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2-(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$;

б) $(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}})^2+2x^{\frac{7}{12}}$; е) $(x^{\frac{1}{4}}+1)\cdot(x^{\frac{1}{4}}-1)\cdot(x^{\frac{1}{2}}+1)$;

в) $\sqrt{b}+\sqrt{c}-(b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}})^2$; ж) $(1+c^{\frac{1}{2}})^2-2c^{\frac{1}{2}}$;

г) $(y^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{1}{5}})^2-6x^{\frac{13}{15}}$; з) $(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})$.

89. Жалпы көбөйтүүчүнү кашаанын сыртына чыгаргыла:

а) $x-2x^{\frac{1}{2}}$; в) $b^{\frac{3}{4}}-2b^{\frac{1}{4}}$; д) $y+2y^{\frac{1}{5}}$; ж) $2b^{\frac{1}{12}}+3b^{\frac{1}{6}}$;

б) $a^{\frac{1}{2}}-5a^{\frac{1}{4}}$; г) $(ab)^{\frac{1}{5}}-(ac)^{\frac{1}{5}}$; е) $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}$; з) $3^{\frac{1}{3}}-201^{\frac{1}{3}}$.

90. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}}$; в) $\sqrt[3]{15}+20^{\frac{1}{3}}$; д) $b^{\frac{1}{3}}-b$; ж) x^4+1;

б) $2+\sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[9]{9}$; е) x^4-1; з) x^6-1.

91. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$; в) $(x^{\frac{1}{2}})^3-8$; д) $125-a$; ж) $y^{\frac{6}{5}}-125$;

б) $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$; г) $a^{\frac{3}{2}}+1$; е) $(y^{\frac{1}{2}})^3+64$; з) $x^{\frac{1}{3}}-729$.

92. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x+1$; в) $a^{\frac{4}{3}}-1$; д) $1-\sqrt[3]{a}$; ж) $a+b$;

б) $y+5$; г) $b^{\frac{3}{2}}-1$; е) $64a+125b$; з) $343\sqrt[3]{x}-1$.

93. Төмөндөгү туюнтманы кубдардын суммасы түрүндө көрсөткүлө жана аны көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; б) $c^{\frac{1}{9}}+d^{\frac{1}{9}}$; в) $a^{-1}+b^{-1}$; г) $a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}$.

94. Төмөнкү туюнтманы кубдардын айырмасы түрүндө көрсөтүп, аны көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{9}}-y^{\frac{1}{9}}$; в) $\sqrt[3]{a}-1$; г) $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{3}}$.

95. Туюнтманы $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ формуласын пайдаланып көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $a^{\frac{1}{10}}-b^{\frac{1}{10}}$; г) $a^{\frac{3}{17}}-b^{\frac{7}{11}}$; ж) $625\sqrt[10]{a}-961\sqrt[4]{b}$;

б) $\sqrt[20]{a}-1$; д) $a-49b^{-1}$; з) $a^{-2}-b$;

в) $5-\sqrt[31]{b}$; е) $a^{\frac{1}{101}}-2b^{\frac{1}{50}}$; и) $\sqrt[10]{a}-\sqrt[10]{b}$.

96. Бөлчөктү кыскарткыла:

а) $\dfrac{5+5^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 5^{\frac{1}{2}}}$; д) $\dfrac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$; и) $\dfrac{10}{10-\sqrt{10}}$;

б) $\dfrac{b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}}$, $b\neq 1$; е) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; к) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}$;

в) $\dfrac{c^{\frac{1}{2}}-3}{c-9}$, $c\neq 9$; ж) $\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{b-a}$, $b\neq a$; л) $\dfrac{-a}{\sqrt{a^2}}$, $a<0$;

г) $\dfrac{2-2^{\frac{1}{2}}}{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; з) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$; м) $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

97. Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдардан бошоткула:

а) $\frac{1}{5+\sqrt{7}+\sqrt{11}}$; д) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{21}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; е) $\frac{15}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; ж) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9}}$; з) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

98. Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдардан бошоткула:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}}$; в) $\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$; д) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{5}}$; ж) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; г) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$; з) $\frac{a}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}}$.

99. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $a=81,\ \frac{a-4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}=?$; в) $x=27,\ \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\frac{2x+16}{x^{\frac{2}{3}}-4}=?$;

б) $x=64,\ \frac{x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{6}}}=?$; г) $y=25,\ \frac{8}{y^{\frac{1}{4}}+2}+\frac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}=?$.

100. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}},\ x\neq y$; в) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}},\ a\neq 1$;

б) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}):(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}})$; г) $(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}):(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2,\ a\neq b$.

§ 7. ИРРАЦИОНАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Каалагандай $a>0$ үчүн бүтүн жана рационалдык көрсөткүчтүү даражаларды жана алардын касиеттерин карап өттүк. Эми иррационалдык көрсөткүчтүү даража кантип аныкталат деген суроо туулат. Маселен, оң сандын иррационалдык даражасын кантип кийиребиз? Ушуга токтололу.

Мисал: Биз $3^{\sqrt{2}}$ санын кантип аныктоого болот деген суроо коёлу. Мында $\sqrt{2}$ саны иррационалдык сан. Бул иррационалдык сандын болжолдуу маанисин табабыз (таблицадан же калькулятор менен):

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135 .$$

Эми $\sqrt{2}$ санынын 0,1; 0,01; 0,001; ... тактыкка чейинки маанилерин удаалаш жазалы. Анда биз төмөнкү рационалдык сан удаалаштыгын алабыз:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \ldots$$

Бул чексиз удаалаштык, анткени $\sqrt{2}$ саны иррационалдык сан болгондуктан, аны чексиз мезгилсиз ондук бөлчөк менен туюнтууга болору белгилүү. Эми жогорку удаалаштыкты пайдаланып (3түн даражасы катары жазып), рационалдык көрсөткүчтүү сандардын төмөндөгүдөй удаалаштыгына келебиз:

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ 3^{1,41421},\ \ldots \qquad (1)$$

Биз монотондуу (бир калыпта) өсүүчү жана ар бир мүчөсү чектүү сан болгон сан удаалаштыгын алдык. Мындай сан удаалаштыгы бир чыныгы санга умтулары белгилүү жана ошол сан $3^{\sqrt{2}}$ болот. Демек, (1) сан удаалаштыгы $3^{\sqrt{2}}$ санынын жакындатылган маанилеринин удаалаштыгы. Ушул (1) деги 3түн рационалдык көрсөткүчтүү даражалуу сан удаалаштыгы аркылуу 3түн иррационалдуу ($\sqrt{2}$) даражасы аныкталат, себеби бул удаалаштык $3^{\sqrt{2}}$ ге умтулат.

Ушул $3^{\sqrt{2}}$ сыяктуу эле 2^{π} ни да аныктоого болот. Бул жерде иррационалдык π санынын төмөнкү жакындатылган маанилерин келтирүү менен чектелели:

$$\pi = 3{,}1415926535897932 3.$$

Иррационалдуу π санынын үтүрдөн кийинки 11 маанисин эстеп калуу үчүн төмөнкү эки сап орусча ырды билип алуу жетиштүү:

«Это я знаю и помню прекрасно,
Их многие знаки мне лишни, напрасно».

Бул ырдын ар бир сөзүнүн тамгаларынын санын цифра менен алмаштырсак, анда $\pi = 3{,}1415926535 8$ экени келип чыгат.

Демек, иррационалдык көрсөткүчтүү даражаны рационалдык көрсөткүчтүү даража менен болжолдоп алмаштырса болот экен.

Мындан биз, a^{α} ны же оң негиздүү a нын каалагандай иррационалдык α көрсөткүчтүү даражасын жогорку мисалдагыдай эле аныктасак болот деген тыянакка келебиз.

Демек, биз мурда өткөндөрдүн баарын эске түшүрсөк, анда оң негиздин каалагандай чыныгы $x \in R$ даражасы аныкталды. Ошондой эле оң a нын чыныгы $x \in R$ даражасы a^{x} тин касиеттери рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттери сыяктуу эле экенин айта кетели.

Эстеп коёлу. Каалагандай $a>0$, $b>0$ жана $x\in R$, $y\in R$ үчүн төмөнкү барабардыктар орун алат:

1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$;

2) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

3) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$;

4) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$;

5) $(a^x)^y=a^{xy}$.

Ошондой эле: $a^0=1$, $a\neq 0$ жана $1^x=1$, $x\in R$ экенин да эске салып коёлу.

Бул 1)—5) барабардыктары иррационалдык көрсөткүчтүү даражалар үчүн да, рационалдык көрсөткүчтүү даражалар үчүн да туура экенин дагы бир жолу эске түйүп алалы.

Айрым мисалдар келтирели.

1 - мисал. $2^{\sqrt{3}}\cdot 2^{-\sqrt{3}+1}=2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}=2$.

2 - мисал. $\frac{\pi^{\sqrt{2}}}{\pi^{\sqrt{2}-5}}=\pi^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+5}=\pi^5$.

3 - мисал. $10^\pi=(2\cdot 5)^\pi=2^\pi\cdot 5^\pi$.

4 - мисал. $(\frac{1}{2})^{5\sqrt{3}}=\frac{1^{5\sqrt{3}}}{2^{5\sqrt{3}}}=\frac{1}{2^{5\sqrt{3}}}$.

5 - мисал. $(7^{\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}}=7^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=7^{10}$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

101. Эсептегиле:

а) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; в) $6^{1+2\sqrt{3}}:(4^{\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}})$; д) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$;

б) $3^{1+2\cdot\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$; г) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}$; е) $(2^{\sqrt[4]{4}-1})^{\sqrt[4]{4}+1}$.

102. Эсептегиле:

а) $\left[(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{8}}$; в) $(\frac{1}{2})^{-\sqrt{2}}\cdot 3^{\sqrt{2}+1}$; д) $9^{\sqrt{2}+1}\cdot 9^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$;

б) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}}$; г) $(8^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}-50$; е) $9^{\sqrt{3}+1}\cdot 3^{2(\sqrt{3}-1}$.

103. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}})^{\sqrt{2}+1}$; б) $\left[(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}\right]^{-2\sqrt{3}}$; в) $\left[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$.

104. Теңдештикти далилдегиле:

а) $(\frac{1}{2})^{12}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot(\frac{1}{8})^{\sqrt{27}}\cdot 16^3=(4^{\sqrt{3}})^{-4}$; б) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}}\cdot\frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}=(6\cdot 2^{19})^{\sqrt{3}}$.

§ 8. САН БАРАБАРСЫЗДЫГЫН ДАРАЖАГА КӨТӨРҮҮ

Бизге 8-класстын алгебрасынан: эгерде $a>b>0$ жана $n\in N$ болсо, анда $a^n>b^n$ болору белгилүү.

Демек, эки жагы тен оң болгон барабарсыздыкты натуралдык n-даражага көтөрсөк, анда барабарсыздыктын белгиси өзгөрбөйт, б. а. эгерде $a>0$, $b>0$ жана $a>b$ болсо, анда $a>b$ барабарсыздыгын оң жагын он жагына, сол жагын сол жагына натуралдык n жолу көбөйтсөк, анда $a^n>b^n$ болору келип чыгат.

Мисалы, $(0{,}43)^5$ жана $(\frac{3}{7})^5$ сандарын салыштырууга туура келсин дейли. Эгерде 0,001 ге чейинки тактык менен $\frac{3}{7}=0{,}428$ экенин эске алсак, анда $0{,}43>\frac{3}{7}$. Демек: $(0{,}43)^5>(\frac{3}{7})^5$.

Эми барабарсыздыкты рационалдык даражага көтөрсөк, кандай болот. Ушуга токтололу.

Бизге каалагандай $p=\frac{m}{n}$ — рационалдык саны берилсин дейли. Анда:

эгерде $a>b>0$, $p>0$ болсо, анда $a^p>b^p$, (1)

эгерде $a>b>0$, $p<0$ болсо, анда $a^p<b^p$ (2)

болот.

Төмөндө барабарсыздыктын (1) жана (2) касиеттерин далилдейбиз.

(1) *касиетинин далилдөөсү.* Адегенде (1) касиети $p=\frac{1}{n}$, $n\in N$, $n\geq 2$ болгондо туура экенин көрсөтөлү. Шарт боюнча $a>b$. Андыктан $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ экенин далилдешибиз керек. Биз далилдөөнү карама-каршысынан далилдөө методу (метод от противного) менен жүргүзөлү. Демек, далилдей турган барабарсыздыгыбыз $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ туура эмес десек, анда $a^{\frac{1}{n}}\leq b^{\frac{1}{n}}$ болушу керек. Бул барабарсыздыкты натуралдык n – даражага көтөрсөк, анда: $a\leq b$ келип чыгат. Бул болсо, $a>b$ экенине карама-каршы жана ошон үчүн $a^{\frac{1}{n}}\leq b^{\frac{1}{n}}$ туура эмес дегенди билдирет. Демек, $a>b>0$ барабарсыздыгынан $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ туура экенин алабыз.

Эми (1) касиетинин далилдөөсүн жалпы учурда келтирели. Биз $p=\frac{m}{n}$, n, m — натуралдык сандар болсун дейли. Анда биз азыр эле жүргүзгөн далилдөө боюнча: $a>b>0$ барабарсыздыгынан $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ барабарсыздыгын алабыз. Эми бул барабарсыздыкты натуралдык m — даражага көтөрсөк, анда: $(a^{\frac{1}{n}})^m>(b^{\frac{1}{n}})^m$, б. а. $a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$, $a^p>b^p$ болот. Ошентип, (1) касиетин далилдедик.

(2) *касиетинин далилдөөсү.* Эми $p<0$, б. а. $-p>0$ болсун дейли. Анда (1) касиети боюнча $a>b>0$, $p>0$ барабарсыздыгынан $a^{-p}>b^{-p}$ болорун алабыз. Бул барабарсыздыктын эки жагын a^pb^p га көбөйтсөк, анда $b^p>a^p$, б.а. $a^p<b^p$ болот. Демек, барабарсыздыктын (2) касиети да туура.

Мисалдар:

1) $5^{\frac{2}{7}}>3^{\frac{2}{7}}$, анткени $5>3$;

2) $2^{\frac{3}{4}}<4^{\frac{3}{4}}$, анткени $2<4$;

3) $\sqrt[5]{7^2}>\sqrt[5]{6^2}$, анткени $7>6$;

4) $(0,7)^{-8}<(0,6)^{-8}$, анткени $0,7>0,6$;

5) $13^{-0,6}>15^{-0,6}$, анткени $13<15$;

6) $\sqrt[4]{8^{-3}}<\sqrt[4]{7^{-3}}$, анткени $8>7$.

Жогорку математика курсунда биз далилдеген (1) жана (2) касиеттери каалагандай чыныгы сан $\alpha\in R$ үчүн туура экени, б. а.:

эгерде $a>b>0$, $\alpha>0$ болсо, анда $a^{\alpha}>b^{\alpha}$,

эгерде $a>b>0$, $a<0$ болсо, анда $a^{\alpha}<b^{\alpha}$ болору далилденет.

Мисалдар:

1) $(\frac{3}{7})^{\sqrt{5}}<(\frac{4}{7})^{\sqrt{5}}$, анткени $\frac{4}{7}>\frac{3}{7}$;

2) $(\frac{4}{5})^{-\sqrt{2}}<(\frac{3}{4})^{-\sqrt{2}}$, анткени $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$.

Эстеп коёлу. Биз жогоруда далилдеген барабарсыздыктын касиеттери барабарсыздык белгилерин > жана < ден ≥ жана ≤ га алмаштырсак да туура болот.

Демек, эгерде эки жагы тең терс эмес болгон барабарсыздыкты оң даражага көтөрсөк, анда барабарсыздыктын белгиси сакталат, ал эми терс даражага көтөрсөк, анда барабарсыздык белгисин карама-каршыга өзгөртөт.

Эске салып койчу жагдай: > жана <, ошондой эле ≥ жана ≤ барабарсыздыктары бири-бирине карама-каршы барабарсыздыктар болушат.

Мисалдар:

1) $(\frac{17}{18})^{-\frac{1}{3}}$ жана $(\frac{18}{17})^{-\frac{1}{3}}$ сандарын салыштыралы. Биз $\frac{17}{18}<1$, $\frac{18}{17}>1$ экенинен $\frac{17}{18}<\frac{18}{17}$ болорун алабыз, анда $(\frac{17}{18})^{-\frac{1}{3}}>(\frac{18}{17})^{-\frac{1}{3}}$.

2) Эми $(\frac{6}{7})^{\sqrt{2}}$ жана $(0,86)^{\sqrt{2}}$ сандарын салыштыралы. Негиздери $\frac{6}{7}=0,857...$, $\frac{6}{7}<0,86$. Андыктан, бул барабарсыздыкты оң $\sqrt{2}$ даражасына көтөрсөк: $(\frac{6}{7})^{\sqrt{2}}<(0,86)^{\sqrt{2}}$.

Жогоруда келтирилген барабарсыздыктын касиеттеринин негизинде сандарды салыштырууда пайдасы тие турган төмөндөгүдөй эреже келип чыгат:

1) эгерде $a>1$ болсо, анда бул a санынын каалагандай эки ар түрдүү оң даражасынын кайсынысынын даражасы чоң болсо, анда ошонусу чоң болот, б.а. эгерде $a>1$, $\alpha>\beta>0$ болсо, анда $a^{\alpha}>a^{\beta}$ болот;

2) эгерде $0<a<1$, болсо, анда бул a санынын каалагандай эки ар түрдүү оң даражасынын кайсынысынын даражасы чоң болсо, анда ошонусу кичине болот, б.а. эгерде $0<a<1$, $\alpha>\beta>0$ болсо, анда $a^{\alpha}<a^{\beta}$ болот.

Мисалдар:

1) $5^3>5^2$, анткени $5>1$ жана $3>2$;

2) $(0,7)^8<(0,7)^3$, анткени $0,7<1$ жана $8>3$;

3) $3^{1,4}<3^{1,5}$, анткени $3>1$ жана $1,4<1,5$;

5) $(\frac{\pi}{4})^{0,51}>(\frac{\pi}{4})^{0,52}$, анткени $\frac{\pi}{4}<1$ жана $0,51<0,52$.

Эми төмөнкү мисалды карайлы.

Мисал. $10^x=1$ теңдемесин чыгаргыла.

$x=0$ саны бул теңдеменин тамыры (чыгарылышы) болот, анткени $10^0=1$. Башка тамырлары барбы же жокпу? Берилген теңдемени $10^x=1^x$ деп жазсак болот. Эгерде $x>0$ болсо, анда $10^x>1^x$ же берилген теңдеме оң тамырга ээ эмес; эгерде $x<0$ болсо, анда $10^x<1^x$ же берилген теңдеме терс тамырга ээ эмес. Демек, $x=0$ берилген теңдеменин жалгыз тамыры.

Жообу: $x=0$.

Жогорку мисалдагы сыяктуу эле: эгерде $a>0$, $a\neq1$ болсо, анда

$$a^x=1$$

теңдемеси бир гана $x=0$ тамырына ээ болору далилденет.

Мындан: эгерде $a>0$, $a\neq1$ болсо, анда

$$a^x=a^y \tag{3}$$

барабардыгы $x=y$ болгондо гана орун алары келип чыгат.

Чындыгында эле, (3) барабардыгын a^{-y} ке көбөйтсөк, анда $a^{x-y}=1$ болот жана мындан $x-y=0$ же $x=y$ болорун алабыз.

Мисал: $3^{2x-1}=27$ теңдемесин чыгаргыла.

$27=3^3$ болгондуктан: $3^{2x-1}=3^3$. Мындан (3) барабардыгынын негизинде $2x-1=3$ экенини алабыз. Демек, $2x=3+1=4$, $x=2$.

Жообу: $x=2$.

Эми $1\neq a>0$, $a\neq b$, $b>0$ болгондой

$$a^x=b$$

теңдемеси берилсин дейли.

Бул тендеменин бир эле x_0 деген тамыры бар экендигин далилдөөгө болот. Бул тендеменин тамыры x_0 ду b санынын a негизи боюнча логарифми деп аташат жана $\log_a b=x$ деп белгилешет. Демек, $\log_a b=x$ тен $b=a^x$ экени келип чыгат.

Мисалдар:

1) $3^x=9$ тендемесинин тамыры $x=2$, б.а. $\log_3 9=2$;

2) $\log_2 16=4$, анткени $2^4=16$;

3) $\log_5 0{,}2=-1$, анткени $5^{-1}=\frac{1}{5}=0{,}2$;

4) $\log_{0,5} 8=-3$, анткени $(0{,}5)^{-3}=(\frac{1}{2})^{-3}=8$.

Каалагандай $b>0$ санынын 10 негизи боюнча логарифмин ондук логарифм деп аташат жана $\lg b$ деп белгилешет. Мисалы, $\lg 100=2$, анткени $10^2=100$; $\lg 0{,}001=-3$, анткени $10^{-3}=0{,}001$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

105. (*Оозеки*). Сандарды салыштыргыла:

а) $2^{\frac{1}{3}}$ жана $3^{\frac{1}{3}}$; г) $21^{-\sqrt{2}}$ жана $31^{-\sqrt{2}}$;
б) $5^{-\frac{4}{5}}$ жана $5^{-0,8}$; д) $5^{\frac{1}{2}}$ жана $5^{-0,8}$;
в) $5^{\sqrt{3}}$ жана $7^{\sqrt{3}}$; е) $(0{,}15)^{\pi}$ жана $(0{,}15)^{3,5}$.

106. Сандарды салыштыргыла:

а) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ жана $(\frac{6}{11})^{\frac{1}{6}}$; д) $\sqrt[5]{4}$ жана $\sqrt[4]{8}$;
б) $(\frac{5}{12})^{-\frac{1}{4}}$ жана $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; е) $\sqrt[3]{9}$ жана $\sqrt[6]{81}$;
в) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ жана $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; ж) $(\sqrt{2})^{\pi}$ жана $(\sqrt{2})^{\frac{22}{7}}$;
г) $(\frac{11}{12})^{-\sqrt{6}}$ жана $(\frac{12}{13})^{-\sqrt{6}}$; з) $(\pi)^{-\sqrt{2}}$ жана $(3{,}14)^{-\sqrt{2}}$.

107. Тендемени чыгаргыла:

а) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; в) $4^{1-2x}=4^5$; д) $4^{x+2}=1$; ж) $7^{x-\frac{1}{2}}=7^{\frac{3}{2}}$;
б) $3^x=27$; г) $2^{2x+1}=32$; е) $(\frac{1}{5})^{4x-3}=5$; з) $\pi^{x-4}=1$.

108. Сандарды салыштыргыла:

а) $\sqrt[7]{4^6}$ жана $\sqrt[10]{4^9}$; в) $\sqrt[7]{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})^2}$ жана $\sqrt[7]{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})^2}$;
б) $(\frac{10}{11})^{5\frac{1}{3}}$ жана $\sqrt[100]{(\frac{10}{11})^{534}}$; г) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ жана $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

109. Теңдемени чыгаргыла:

а) $3^{2-y}=27$; в) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; д) $5^{2x-3}=125$;

б) $3^{5-2x}=1$; г) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$; ж) $2^x=3^x$.

110. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(\frac{1}{9})^{2x-5}=3^{5x-8}$; в) $8^x\cdot4^{x+13}=\frac{1}{16}$;

б) $2^{4x-9}=(\frac{1}{2})^{x-4}$; г) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=(\frac{1}{5})^{x-7,5}$.

111. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x+1}=(3\sqrt{3})^x$; в) $9^{3x+4}\cdot\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$;

б) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=(\frac{2}{\sqrt[3]{2}})^{2x}$; г) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x}=4^{3x-2}\cdot\sqrt{2}$.

112. Эсептегиле:

а) $\log_7 49$; в) $\log_{0,5} 4$; д) $\log_4 64$; ж) $\log_5 625$;

б) $\log_2 64$; г) $\log_3 \frac{1}{27}$; е) $\log_5 125$; з) $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

IV ГЛАВАГА КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

Эскертүү. Төмөндөгү көнүгүүлөрдө, эгерде кошумча шарт коюлбаса, анда тамгалар менен оң сандар белгиленди деп түшүнгүлө.

113. Тамырдан чыгаргыла:

а) $\sqrt{4\cdot9\cdot16\cdot25\cdot36\cdot49\cdot64\cdot81\cdot100\cdot121\cdot144}$;

б) $\sqrt[3]{8\cdot27\cdot64\cdot125\cdot216\cdot343\cdot512\cdot729\cdot1000}$;

в) $\sqrt[4]{16\cdot81\cdot256\cdot625\cdot1296\cdot2401}$;

г) $\sqrt[5]{32\cdot243\cdot1024\cdot3125\cdot100000}$.

114. Тамырдан чыгаргыла:

а) $\sqrt{\frac{121}{144}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1024}{3125}}$; д) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$; ж) $\sqrt[4]{\frac{256}{6561}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{125}{729}}$; г) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$; з) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

115. Тамырдан чыгаргыла:

а) $\sqrt[4]{a^8b^4c^{12}d^{32}}$; в) $\sqrt[5]{-32m^5n^{10}p^{15}q^{20}}$;

б) $\sqrt[3]{-125x^3y^6z^9u^{12}}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{8a^6b^3c^9}{27x^{12}y^{18}}}$;

д) $\sqrt{9a^8}$;　　е) $\sqrt[3]{8x^6}$;　　ж) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^3b^9c^6}$.

116. Тамырдан чыгаргыла:

а) $\sqrt[5]{m^{-10}n^{-15}}$;　　е) $\sqrt[3]{\frac{64a^{-12}b^{15}}{125c^{-6}d^{-3}}}$;

б) $\sqrt[3]{-a^{-6}b^{-9}}$;　　ж) $-\sqrt[3]{8}$;

в) $\sqrt{961a^{-4}}$;　　з) $-\sqrt[2]{a^4}$;

г) $\sqrt[4]{16x^{-8}y^4z^{-12}}$;　　и) $-\sqrt[5]{\frac{x^{10}}{y^5}}$;

д) $\sqrt[3]{\frac{8a^{-6}}{27b^{-9}}}$;　　к) $-\sqrt[3]{8a^{-6}b^3c^{-9}}$.

117. Эгерде $y=x^n$ функциясынын графиги:
а) $A(2; 8)$;　б) $B(3,5; 12,25)$;　в) $C(-3; 81)$;　г) $D(-2; -32)$
чекити аркылуу өтөрү белгилүү болсо, анда n ди аныктагыла.

118. Эгерде $y=x^n$ функциясынын графиги:
а) $A(2; 5)$;　　в) $C(-5; 415)$;
б) $B(\sqrt{3}; 81)$;　　г) $D(-7; -343)$
чекити аркылуу өтсө, анда n натуралдык сан боло алабы?

119. Теңдеменин канча тамыры бар:
а) $x^{10}=2$;　в) $x^7=0$;　д) $x^7=5$;　ж) $x^{102}=100$;
б) $x^{10}=-3$;　г) $x^{10}=0$;　е) $x^7=-1$;　з) $x^{1001}=1001$?

120. Эсептегиле:

а) $-0,5\cdot\sqrt[10]{1024}$;　　г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

б) $-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[7]{-2187}$;　　д) $\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[7]{(0,1)^7}$;

в) $1,5\cdot\sqrt[9]{512}-3$;　　е) $\sqrt[4]{16^{-2}}\cdot\sqrt[3]{(0,125)^3}$.

121. Теңдемени чыгаргыла:
а) $x^3=125$;　в) $\sqrt{x}=0,2$;　д) $\sqrt[4]{a}=-1$;　ж) $\sqrt[8]{x}=1$;
б) $x^4=1296$;　г) $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$;　е) $\sqrt[4]{x}=2$;　з) $\sqrt[3]{y}=-2$.

122. График жана «интервалды экиге бөлүү» методдорун, микрокалькуляторду колдонуп, теңдеменин тамырын 0,001ге чейинки тактык менен тапкыла:
а) $x^3=7$;　　б) $x^4=15$, $x>0$;　　в) $x^5=2$.

123. Өзгөрмөнүн туюнтма мааниге ээ боло (аныктала) тургандай маанилерин тапкыла:

а) $\sqrt[8]{x-2}$; г) $\sqrt[6]{(a-2)(a-5)}$; ж) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$;

б) $\sqrt{\frac{9-x}{5}}$; д) $\sqrt[4]{y^2-5x+6}$; з) $\sqrt{(1-x)(x-2)}+\frac{1}{x-1}$;

в) $\sqrt[3]{x+5}$; е) $\sqrt[12]{-b^2+6b-8}$; и) $\sqrt[4]{x^2-x+1}$.

124. Төмөнкү барабардык x тин кандай маанилеринде туура:

а) $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}$; г) $\sqrt[4]{(x-2)(8-x)}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{8-x}$;

б) $\sqrt{(x-a)^3}=(\sqrt{x-a})^3$; д) $\sqrt[3]{(x+1)(x-5)}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x-5}$;

в) $\sqrt[3]{(x-5)^2}=(\sqrt[3]{x-5})^2$; е) $\sqrt{x\cdot(x+1)(x+2)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}$?

125.

а) $\sqrt{45}$ саны $\sqrt{5}$ тен канча эсе чоң;

б) $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$ саны $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$ төн канча эсе кичине?

126. Геометриялык прогрессияда (b_1, b_2, ... , b_n, ...):

а) $b_1=3$, $b_6=96$; в) $b_1=-\frac{1}{3}$, $b_8=729$;

б) $b_1=0,2$, $b_{11}=204,8$; г) $b_1=1$, $b_{10}=3$

болсо, анда анын бөлүмүн тапкыла.

127. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^8+6x^4-7=0$; в) $x^6+11x^3+24=0$; д) $x^{100}+2x^{50}-3=0$;

б) $x^{12}-9x^6+14=0$; г) $x^{14}-5x^7+6=0$; е) $x^5+4x^3-5x=0$.

128. Теңдемени жана барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{x}=5$; $\sqrt[3]{x}>5$; $\sqrt[3]{x}<5$; б) $\sqrt[4]{x}=2$; $\sqrt[4]{x}>2$; $\sqrt[4]{x}<2$.

129. Айырманын белгисин аныктагыла:

а) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{7}$; г) $\sqrt[6]{0,28}-\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$; ж) $3\cdot\sqrt[3]{4}-4\cdot\sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; д) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$; з) $2^{\pi}-2^{3,142}$;

в) $1-\sqrt[4]{0,99}$; е) $2\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot\sqrt[3]{2}$; и) $\sqrt[5]{4}-\sqrt[6]{5}$.

130. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=\sqrt{x-2}$; в) $y=\sqrt[3]{8x+1}$; д) $y=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}$;

б) $y=\sqrt[4]{5-2x}$; г) $y=\sqrt[4]{x^2-5x+6}$; е) $y=\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+2}}$.

131. График методу менен, б.а. $y=x$, $y=\sqrt{x}$ жана $y=\sqrt[3]{x}$ функцияларынын графиктерин пайдаланып, төмөндөгү теңдемени жана барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{x}=x$; $\sqrt{x}>x$; $\sqrt{x}<x$; б) $\sqrt[3]{x}=x$; $\sqrt[3]{x}>x$; $\sqrt[3]{x}<x$.

132. Теңдеме канча тамырга ээ:

а) $\sqrt[6]{x}=1000$; б) $\sqrt[8]{x}=-10$; в) $\sqrt[7]{x}=-100$?

133. Сандарды өсүү тартибинде жазгыла:

а) $\sqrt{2}$; 1,4; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt[3]{0{,}3}$; $\sqrt[5]{0{,}2}$; 0,5.

134. Барабардыкты далилдегиле:

а) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=1$; б) $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=1$.

135. Туюнтманы бөлүмү натуралдык сан болгон бөлчөк түрүнө келтиргиле:

а) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{25}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; д) $\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; ж) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}}$; г) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$; з) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1}$.

136. Эгерде:

а) $0<x<1$ жана $1<y<8$; б) $1<x<25$ жана $\frac{1}{8}<y<64$

болсо, анда $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ туюнтмасынын маанисин болжолдоп аныктагыла.

137. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{x}-2\cdot\sqrt[6]{\ }=0$; г) $\sqrt[6]{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}-1=0$;

б) $\sqrt[6]{x}-0{,}1=0$; д) $\sqrt{x}-5\cdot\sqrt[4]{x}+6=0$;

в) $\sqrt[10]{x}+5=0$; е) $\sqrt[4]{x}-2\cdot\sqrt[8]{x}-3=0$.

138. Тамырды бөлчөк көрсөткүчтүү даража менен алмаштырып, туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $2{,}5\sqrt{40}$; в) $(x+1)^2\cdot\sqrt[4]{x+1}$; д) $3xy\cdot\sqrt[3]{\frac{64a^3b^9}{27x^3y^6}}$;

б) $-8\sqrt[3]{2}$; г) $(y-5)^3\sqrt{y-5}$; ж) $(x-1)^{-1}\cdot\sqrt[4]{(x-1)^4}$.

139. Сандарды салыштыргыла:

а) $8^{\frac{1}{2}}$ жана $8^{\frac{1}{3}}$; в) $3^{\frac{1}{3}}$ жана $5^{\frac{1}{4}}$; д) $7^{\frac{1}{6}}$ жана $6^{\frac{1}{7}}$;

б) $5^{\frac{1}{6}}$ жана $8^{\frac{1}{8}}$; г) $3^{\frac{1}{12}}$ жана $4^{\frac{1}{16}}$; ж) $2^{\frac{1}{3}}$ жана $\sqrt[6]{4}$.

140. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x-2)^{\frac{1}{2}}=4$; г) $(y+3)^{-1}=\frac{1}{4}$;

б) $(x-2)^2=4^{\frac{1}{2}}$; д) $(a-5)^{\frac{1}{3}}=0$;

в) $(y+3)^{\frac{1}{4}}=-1$; е) $(x-1)^{\frac{1}{4}}=2$.

141. Эгерде:

а) $\frac{1}{32} < x < 1$; б) $1<x<32$; в) $32<x<1000$

болсо, анда $x^{\frac{1}{5}}$ жана $x^{\frac{2}{5}}$ туюнтмаларынын маанилерин болжолдоп аныктагыла.

142. Теңдеменин кандайдыр бир эки чыгарылышын тапкыла:

а) $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^2 = 32$; б) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = 9$.

143. Эгерде:

а) $x = t^{\frac{1}{2}}$, $y = t^{-\frac{1}{2}}$; б) $x = t^{\frac{1}{3}}$, $y = t^{\frac{1}{6}}$; в) $x = 3t^{\frac{1}{2}}$, $y = 2t^{-\frac{1}{3}}$

болсо, анда x жана y өзгөрмөлөрүнүн арасындагы көз карандылыкты (байланышты) тапкыла.

144. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(x^{0,5} - y^{0,5}) \cdot x^{0,5}y + (xy^3)^{0,5}$;

б) $(1 - x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{4}}) + (x^8)^{\frac{1}{16}}$;

в) $\frac{3\sqrt{a}}{a} + a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a} - \frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[21]{a}} - \frac{3a^0}{\sqrt{a}}$;

г) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$.

145. Туюнтманы бири $y^{-0,6}$ га барабар болгон эки көбөйтүүчү түрүндө көрсөткүлө:

а) $y^2 + y^{-0,6}$;

б) $y^{-1} + y^{-0,4}$;

в) $3y - 1$;

г) $y^{-\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}}$.

146. Кыскача көбөйтүүнүн $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуласын пайдаланып, туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $y^{\frac{1}{9}} - 9$; в) $9c^{0,3} - 4$; д) $b^{\frac{1}{5}} - 1$; ж) $x^{\frac{1}{32}} - 1$;

б) $y^{\frac{1}{16}} - 16$; г) $2x^{\frac{1}{3}} - 49$; е) $y^{1,5} - y^2$; з) $x^{0,7} - 0,16$.

147. Кыскача көбөйтүүнүн $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ формуласын пайдаланып, туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x + 1000$;

б) $a^{0,9} - 8b$;

в) $27y^{\frac{1}{3}} - 1$;

г) $a^{2,4} + b^{0,5}$.

148. Туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x - y + \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

б) $u - \sqrt{u} + \sqrt{v} - v$;

в) $a + 2a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 1$;

г) $2b^2 + b^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + 2$;

д) $x - 5x^{\frac{1}{2}} + 4$;

е) $y^{\frac{1}{2}} - 13y^{\frac{1}{4}} + 36$.

149. Туюнтманын мааниси n ден көз каранды эмес экендигин далилдегиле:

а) $\dfrac{(9^n-9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$;   б) $\dfrac{(8^{n-2}-7\cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(16^{n-1}-16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$.

150. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x-6x^{\frac{1}{2}}-55=0$;   в) $3x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{1}{4}}+1=0$;

б) $y^{\frac{2}{3}}-10y^{\frac{1}{3}}+24=0$;   г) $7y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{8}}=8$.

151. Эгерде:

а) $x=t^{\frac{1}{2}}-1$, $y=t^{-\frac{1}{2}}+1$;   б) $x=(a+1)^{\frac{1}{2}}$, $y=(a-1)^{\frac{1}{2}}$, $a>1$

болсо, анда x менен y тин арасындагы көз карандылыкты тапкыла.

152. Эсептегиле:

а) $(0{,}175)^0+(0{,}36)^{-2}-1^{\frac{4}{3}}$;   в) $(\frac{4}{5})^{-2}-(\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^0$;

б) $1^{-0{,}43}-(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}+(15{,}1)^0$;   г) $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}+(\frac{3}{4})^2-(1{,}85)^0$.

153. Эгерде $x=5$, $y=20$ болсо, анда $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{3}}$

туюнтмасы үчүн төмөнкү жооптордун кайсынысы туура:

а) 0,02;   б) 0,1;   в) 0,5;   г) 1 ?

154. Эсептегиле:

а) $\left[(\frac{3}{4})^0\right]^{-0{,}5}-7{,}5\cdot 4^{-\frac{3}{2}}-(-2)^{-1}+81^{0{,}25}$;

б) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}-(-\frac{1}{6})^{-2}+256^{0{,}75}-3^{-1}+(5{,}5)^0$;

в) $\left[4^{-\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\left[4^{-0{,}25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right]$.

155. Сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:

а) $(\frac{9}{4})^{-0{,}1}$; $(\frac{9}{4})^{0{,}2}$; $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{6}}$;

б) $(\frac{4}{7})^{-\frac{2}{3}}$; $(\frac{49}{16})^{\frac{4}{3}}$; $(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{4}}$;

в) $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{5}}$; $(\frac{125}{27})^{-\frac{1}{15}}$; $(\frac{9}{25})^{-4}$.

156. Татаал радикалдардын формулаларын пайдаланып, туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$.

157. Эгерде $1 \le x \le 2$ болсо, анда $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ экенин далилдегиле.

158. Эсептегиле:

а) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;

б) $(\frac{1}{16})^{-0,75}+10000^{0,25}-(7\frac{19}{32})^{\frac{1}{5}}$;

в) $0,001^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}$;

г) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}$;

д) $(-0,5)^{-4}-625-(2\frac{1}{4})^{-1\frac{1}{2}}$.

159. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x})$;

б) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{16x})+(\sqrt[4]{81x}-\sqrt[4]{625x})$;

в) $(\frac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}):\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$.

160. Теңдемени чыгаргыла:

а) $7^{5x-1}=49$; в) $(\frac{1}{7})^{3x+31}=7^{2x}$;

б) $(0,2)^{1-x}=0,04$; г) $3^{5x-7}=(\frac{1}{3})^{2x}$.

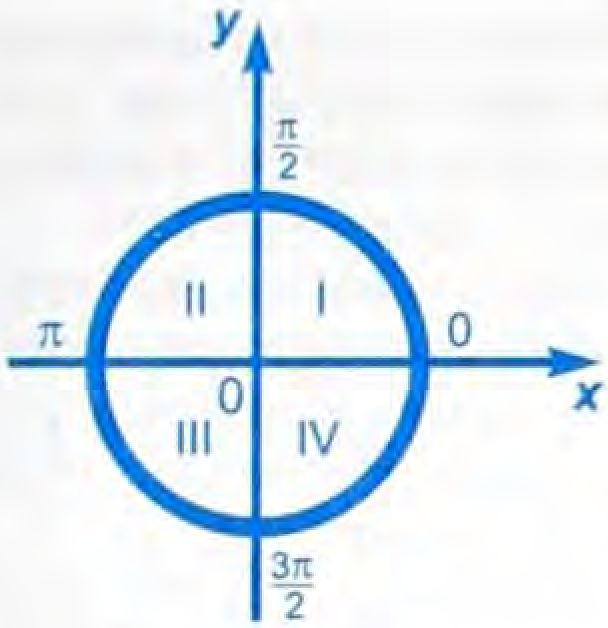
161. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}}$, $a \ne 1$; в) $\frac{b^{\frac{5}{4}}+2b^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$;

б) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$, $a \ne 1$; г) $\frac{\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b}}$, $a \ne b$.

162. Көлөмү 100 см^3 болгон кубдун кырын ушундай көлөмдөгү шардын радиусу менен салыштыргыла. Бул шарды берилген кубдун ичине батырууга болобу?

Көрсөтмө. Шардын көлөмү $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ формуласы менен эсептелет, мында R — радиус.



V глава

ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

§ 1. БУРЧ ЖАНА АНЫН РАДИАНДЫК ЧЕНИ

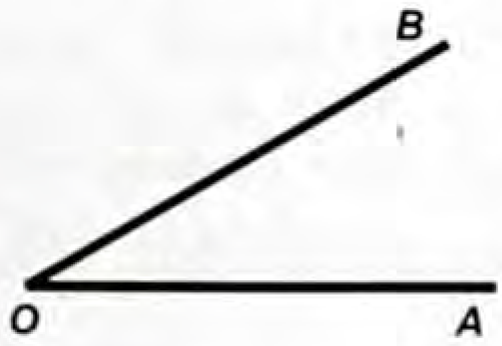
1. Биз буга чейин бурчту бир чекиттен чыккан эки шоладан түзүлгөн фигура катары түшүнүп келгенбиз. Геометрияда берилген бул аныктамадан тышкары да башталыш чекитке карата шооланын каалагандай бурулушунан пайда болгон фигураны бурч деп аныктоого болот.

Албетте, буруу аркылуу өзгөртүлгөн шооланын баштапкы жана акыркы абалы, биз мурда бурч деп атаган геометриялык фигуранын өзүн берет (44-сүрөт).

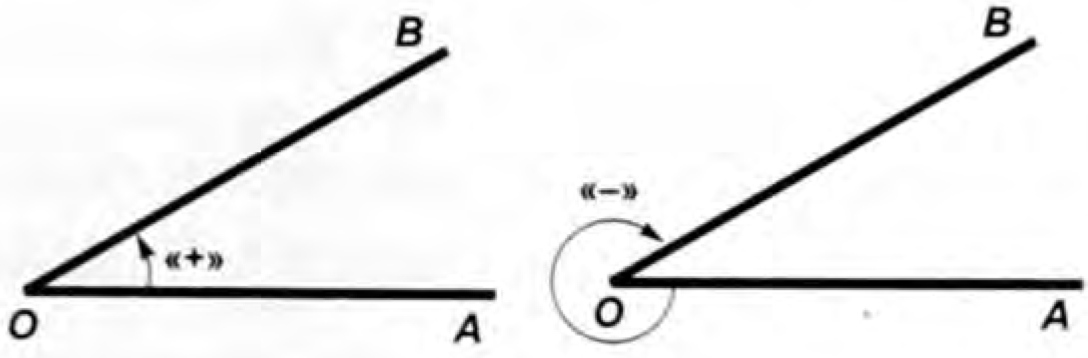
Шооланын баштапкы жана акыркы абалынын берилиши менен буруу бурчу бир эле маани менен эмес андан 360°ка эселүү санга айырмаланган бир катар маанилери менен да аныкталат.

Маселен, *OA* шооласы айланып келип кандайдыр бир *OB* абалына келгенде буруу бурчу 42°, $42^\circ+360^\circ=402^\circ$, $42^\circ-360^\circ=-318^\circ$ жана дегеле, $42^\circ+360^\circ n$ болушу мүмкүн, мында n — каалаган бүтүн сан.

Буруу карама-каршы эки багытта аткарылышы мүмкүн. Адатта, сааттын жебесинин айлануу багытына каршы аткарылган буруулар оң, ал эми сааттын жебесинин багыты боюнча аткарылган буруулар терс деп кабыл алынат. Ошого жараша буруудан пайда болгон бурчтар да тиешелүү түрдө *оң, терс* деп аталышат (45-сүрөт).



44-сүрөт.



45-сүрөт.

Геометриядан бизге бурч жаанын жардамы аркылуу өлчөнөрү белгилүү. *Эгер жаа бурчту өлчөө үчүн кызмат кылса, анда аны же айлананын үлүшү, же радиустун үлүшү катары туюнтуп алууга болот.*

Биринчи учурда жаа, демек, бурч градус аркылуу туюнтулат (бул учур көрсөтмөлүү жана турмуштук ченөөлөрдө, бурч ченөөчү аспаптарда колдонулат). Экинчи учурда жаа анын радиуска тиешелүүлүгүн көрсөткөн сан аркылуу туюнтулат (бул теориялык суроолорду чечүүдө артыкчылык кылат).

Маселен, эгер «Жаа чоңдугу 1,75» деп айтылса, анда түзүлгөн жаа 1.75 радиус бирдигин камтыйт дегенди билдирет. Ушул ыкма боюнча жарым айлана $\pi R{:}R$ катышы, б. а. π саны, ал эми айлананын төрттөн бири $\frac{\pi}{2}$ саны аркылуу ченелген болот ж. б.

Жаанын мындай ченелиши анын *радиандык бирдик* аркылуу ченелиши деп аталат.

Ошентип бурчтун радиандык чени катары айлананын бурчту түзгөн жаасынын узундугунун анын радиусуна болгон катышын алабыз. Бул аныктама боюнча радиандык чен мындайча жазылат:

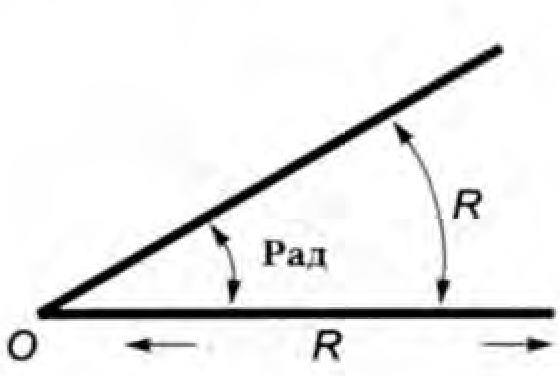
$$\frac{l}{R}=\alpha \ .$$

Эгер $l=R$ болсо бурчтун радиандык чени 1ге барабар. Мындай бурч 1 *радиан бурч* деп аталат.

Демек, айлананын радиусунун узундугуна барабар болгон жаанын узундугуна тирелген борбордук бурч 1 *радиан бурч* деп аталат (46-сүрөт). Мындан, айлананын узундугуна туура келген толук бурч $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$ радианды түзөрү келип чыгат. Жарым айлананын радиандык чени болсо π ге барабар болот. Бул, чоңдугу бир радиан болгон жаа (демек айлананын радиусу) жарым айланада π жолу жатат дегендикти билдирет.

Жарым айлананын градустук чени 180° болгондуктан, *бир радиан болгон жаанын градустук чени* $\frac{180^\circ}{\pi}$ ге барабар. Демек, 1 радиан жарым айлананын градустук чининен π эсе кичине болот, б. а.

$$1\ рад=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 17' 45''\ (60^\circ\ \text{ка жакын}).$$



46-сүрөт.

Жарым айлананын градустук чени 180°, ал эми радиандык чени π экендигин билип туруп 1° *бурчтун радиандык чени* $\frac{\pi}{180^\circ}$ ге барабар болорун алабыз, б. а.

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}рад\approx 0{,}017\ рад.$$

2. Жогорудагы катнаштардын жардамы менен каалаган бурчтун радиандык ченинен градустук ченине жана тетирисинче, анын градустук ченинен радиандык ченине өтүүгө болот.

Биз бул жерде кыйла көбүрөөк кездеше турган гана бурчтардын градустук жана ага тиешелүү радиандык чендеринин байланыштарын келтиребиз:

$15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 = \frac{\pi}{12}$; $30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$;

$45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$; $60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$;

$90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2}$; $120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3}$;

$150^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6}$; $270^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 270 = \frac{3\pi}{2}$.

1-мисал. $\frac{\pi}{9}$ радианга барабар болгон бурчту градус менен туюнткула.

$\frac{\pi}{9}\,рад = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{9} = 20^\circ$ экендигине ээ болобуз.

2 - мисал. 100° ка барабар болгон бурчту радиан аркылуу туюнткула.

Изделүүчү радиандык ченди табуу үчүн 100° ту $\frac{180^\circ}{\pi}$ ге бөлөбүз:

$100^\circ : \frac{180^\circ}{\pi} = 100^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{9}\,рад$.

Адатта, бурчтун радиандык чени бурч белгиленген тамга менен белгиленет да, «радиан» деген сөз жазылбайт.

Маселен, a=72° болсо, анын радиандык чени $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 72\,рад$.

же $\alpha = \frac{2\pi}{5}\,рад$. дебей, кыскартып, $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ деп жазууга болот.

3 - мисал. Градустук чоңдугу 45°, радиусу 20 см болгон айлананын жаасынын узундугун тапкыла.

45° тук жаанын радиандык чени $\frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ *рад.* болгондуктан, $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{4} = 5\pi\,см$

4 - мисал. Радиусунан эки эсе узун болгон түндүктүн алкагынын жаасы канча градусту камтыйт?

Шарт боюнча l=$2R$, анда $\alpha = \frac{l}{k} = \frac{2R}{R} = 2\,рад \approx 114^\circ 6'$.

5-мисал. Радиусу 4 кө барабар, ал эми тиешелүү борбордук бурчу а) 75° ту; б) 2 радианды камтыган AB жаасынын узундугун тапкыла.

а) Эгер жаа керип турган борбордук бурч 75° болсо, анда жаа да 75° ту камтыйт, демек ал жаанын узундугу

$$\frac{\pi k}{180^\circ}\cdot 75^\circ = \frac{\pi\cdot 4}{180}\cdot 75 = \frac{5\pi}{3}.$$

б) Эгер жаа 2 радианды камтыса, анда ал жаанын узундугу 2R, б.а. биздин учурубузда ал 8 ке барабар.

6-мисал. Тигилген боз үйдүн үч канат керегесинин узундугу 12 м. Анын түбү (жаасы) 200° бурчту түзөт. Ал үйдүн түбүнүн радиусун тапкыла.

200° бурчтун радиандык чоңдугу $\frac{\pi}{180}\cdot 200 = \frac{10\pi}{9}$ *рад.* болгондуктан, боз үйдүн радиусу $R = \frac{\ell}{\alpha} = \frac{12\cdot 9}{10\pi} = \frac{108}{31{,}4} \approx 3{,}4\ м$.

7-мисал. Тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчу $\frac{\pi}{6}$ болсо, негизиндеги бурчун градус аркылуу туюнткула.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ.$$

Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы

$180 = 2\alpha + 30^\circ$ болгондуктан,

$$\alpha = \frac{180-30}{2} = 75^\circ.$$

СУРООЛОР

1. Бурч түшүнүгүн жалпылоо эмнелерден турат? Бурчтун геометриядагы жана тригонометриядагы аныктамаларын салыштыргыла.

2. Кандай бурчтарды (жааларды) оң, терс деп атоо кабыл алынган?

3. Бурчтун (жаанын) радиандык чени деп эмнени айтабыз?

4. Радиан деп эмне аталат? Ал бурчтун градустук чени менен кандай байланышта?

5. Толук айлананын, жарым айлананын радиандык чендери эмнеге барабар болот?

6. Бир градусту радиандык чен менен туюнтсак канчага барабар болот?

7. A° ту камтыган жаанын радиандык чени эмнеге барабар болот?

8. M радианды камтыган жаанын градустук чени эмнеге барабар?

9. Бурчтун градустук ченин радианга жана радиандык градуска которчу формуланы жазып бергиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\frac{\pi}{12}$ радианга барабар болгон бурчтун чоңдугун градус аркылуу туюнткула.

2. 150° ка барабар болгон бурчтун чоңдугун радиан аркылуу туюнткула.

3. Таблицаларды толтургула:

а)

Градустук чени	-15°	80°	105°	125°	155°	225°	240°	300°	315°	345°
Радиандык чени										

б)

Радиандык чени	$\pi/5$	$2\pi/5$	$\pi/10$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$7\pi/12$	$3\pi/4$	$4\pi/15$	$11\pi/6$	$5\pi/2$
Градустук чени										

4. Үч бурчтуктун эки бурчунун чоңдуктары 59° жана 69°. Анын үчүнчү бурчунун радиандык чени канчага барабар?

5. Үч бурчтуктун эки бурчу $\frac{3\pi}{10}$ го жана $\frac{2\pi}{15}$ ке барабар. Анын үчүнчү бурчунун градустук ченин тапкыла.

6. Жаасы $\frac{\pi}{10}$ радианды камтып, радиусу 80 см болгон айлананын жаасынын узундугун тапкыла.

7. Айлананын жаасынын узундугу 200° ту камтыйт жана анын узундугу 50 см. Бул айлананын радиусун тапкыла.

8. Минуталык жебенин: а) 5 *мин.*; б) 20 *мин.*; в) 0,75 *саатта* басып өткөн бурчунун градустук жана радиандык чендерин аныктагыла.

9. Радиусу 65 см болуп, $\frac{\pi}{4}$ радианды камтыган боз үйдүн түндүгүнүн алкаганын жаасынын узундугу, ал жаанын градустук чени жана түндүктүн өзүнүн алкагынын узундугу эмнеге барабар?

§ 2. КААЛАГАН БУРЧТУН СИНУСУ, КОСИНУСУ, ТАНГЕНСИ ЖАНА КОТАНГЕНСИ

Геометрия курсунда α тар бурчунун синусу, косинусу жана тангенси аныкталган болучу. Анда берилген маалыматтар тик бурчтуу үч бурчтукка байланыштуу маселелерди чыгаруу үчүн жетиштүү болгон. Бирок, ал маалыматтар каалаган кыйгач бурчтуу үч бурчтуктарды кароодо жетишсиз. Ошондуктан, бул аныктамаларды каалагандай чоңдуктагы α бурчу үчүн кароо зарылчылыгы келип чыгат. Андан тышкары дагы α бурчунун *котангенсин* аныктайбыз, ал $\mathrm{ctg}\,\alpha$ деп белгиленет.

Тик бурчтуу координаталар системасынын абсцисса огунун оң бөлүгүнөн A чекитин белгилеп алабыз. Борбору координаталар башталышында жаткан жана A чекити аркылуу өткөн айлана жүргүзөбүз (47-сүрөт). OA радиусун баштапкы радиус деп атайбыз. Ал эми OB радиусун кыймылдагы радиус деп атап коёлу. Анткени ал OA баштапкы радиусун кандайдыр бир бурчка буруудан алынат. 4-сүрөт боюнча OB радиусу OA баштапкы радиусун α бурчуна буруудан алынды деп карайбыз. Муну OA баштапкы радиусу менен OB кыймылдагы радиусу α бурчун түзүшөт деп да айтсак болот.

Баштапкы радиус менен α бурчун түзгөн кыймылдагы радиустун B учу кайсы чейректе жатканына байланыштуу α бурчу ошол чейректе бүтөт деп айтылат. Маселен, эгер кыймылдагы радиустун B учу I чейректе жатса α бурчу I чейректен бүтөт, эгер кыймылдагы радиустун учу II чейректе жатса α бурчу II чейректен бүтөт ж.б. 48-сүрөттө кыймылдагы радиустун B учу III чейректе жатат; биз α бурчу III чейректен бүтөт деп айтабыз. $\frac{\pi}{2}$ ге эселүү бурчтар эч кандай чейректен бүтүшпөйт. O чекитинин айланасында α бурчка бурганда OA баштапкы радиус OB радиусуна өтсүн дейли (49-сүрөт).

B чекитинин ординатасынын радиуска болгон катышы α бурчунун *синусу* деп аталат.

B чекитинин абсциссасынын радиуска болгон катышы α бурчунун *косинусу* деп аталат.

B чекитинин ординатасынын анын абсциссасына болгон катышы α бурчунун *тангенси* деп аталат.

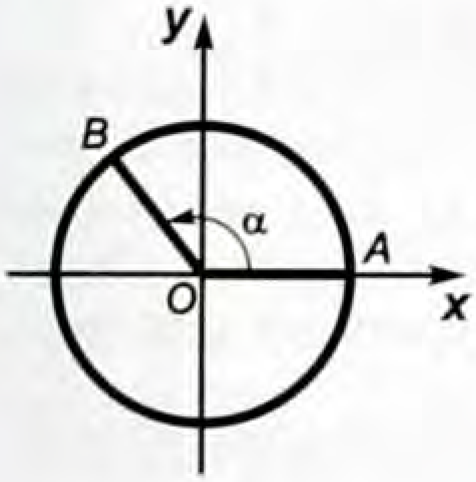
B чекитинин абсциссасынын анын ординатасына болгон катышы α бурчунун *котангенси* деп аталат.

Эгер B чекитинин координаталары x жана y ке, ал эми баштапкы радиустун узундугу R ге барабар десек, анда

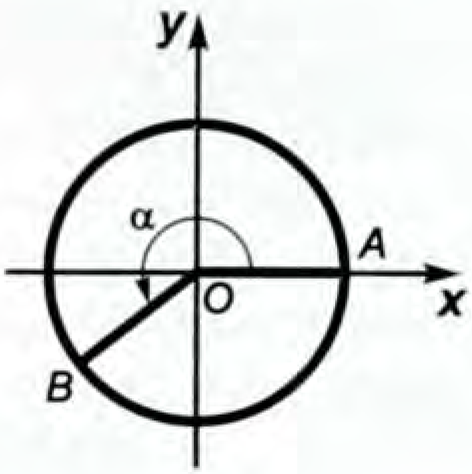
$$\sin\alpha = \frac{y}{R}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{R}; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

болот.

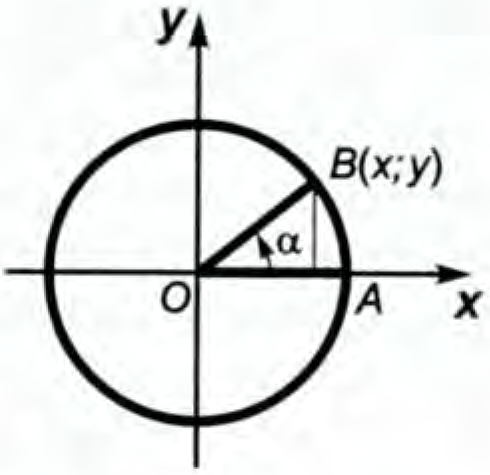
Мында $\frac{y}{R}$, $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ катыштары берилген α бурчу үчүн турактуу, б.а. алар кыймылдагы радиустун узундугуна эмес, α бурчуна гана көз каранды болушат.



47-сүрөт.



48-сүрөт.

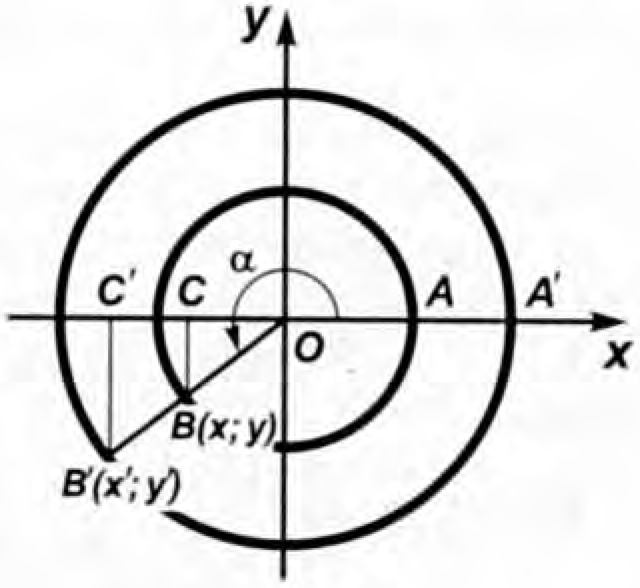


49-сүрөт.

Чындыгында эле B' кыймылдагы OB радиусунда же анын B чекитинен кийинки уландысында жаткан каалаган чекит болсун (50-сүрөт). Анда OBC жана $OB'C'$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан

$$\frac{y}{R}=\frac{y'}{R'};\quad \frac{x}{R}=\frac{x'}{R'};\quad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'};\quad \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'},$$

мында $R'=OB'$, x', y' болсо B' чекитинин координаталары.



50-сүрөт.

Мына ошентип $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилери кыймылдагы радиустун узундугуна көз каранды болбостон, жалаң α бурчу аркылуу гана аныкталышат. Ошондуктан, алар α бурчуна көз каранды *тригонометриялык функциялар* деп аталышат.

Тригонометриялык функцияларды сандан көз каранды болгон функциялар катары карасак да болот. Мурдагы параграфта бурчтун градустук чени менен катар эле анын радиандык чени да болору айтылган. Ошондуктан, α радиандагы бурчтун тригонометриялык функцияларын *α санына көз каранды* болгон тригонометриялык функциялар деп атай берсек болот.

Эми тригонометриялык функциялардын аныкталуу областы жана маанилеринин областы жөнүндө сөз кылалы.

Аныктамадан көрүнүп тургандай α санынын (аргументтин) каалагандай маанисинде $\sin\alpha$ да, $\cos\alpha$ да мааниге ээ болушат.

Ошондуктан бул функциялардын аныкталуу областы — $(-\infty; +\infty)$ аралыгы. α кандай гана маанини албасын $\sin\alpha$ да, $\cos\alpha$ да 1ден ашпайт жана -1ден кичине эмес. Себеби, кыймылдагы OB радиусунун B учунун абциссасы да, ординатасы да модулу боюнча ал радиустун узундугунан чоң эмес. Ошентип, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ нын маанилери $[-1;1]$ аралыгында жатышат.

$\text{tg}\,\alpha$ жана $\text{ctg}\,\alpha$ B чекитинин координаталарынын катышы аркылуу туюнтуларын жогоруда көргөнсүнөр. Ал жерден B чекитинин абциссасы 0гө барабар болгондо $\text{tg}\,\alpha$, ал эми ординатасы 0гө барабар болгондо $\text{ctg}\,\alpha$ мааниге ээ болбой каларын байкоо кыйын эмес (себеби бөлчөктүн бөлүмү 0гө барабар боло албайт). Демек, α нын $\pm\frac{\pi}{2}$ ге, $\pm\frac{3\pi}{2}$ ге ж. б. у. с. барабар болгон маанилери $\text{tg}\,\alpha$ нын, 0гө, $\pm\pi$ ге, $\pm 2\pi$ ге ж. б. у. с. барабар болгон маанилери $\text{ctg}\,\alpha$ нын аныкталуу областына киришпейт. Жалпысынан алганда $\text{tg}\,\alpha$ бул α нын $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ден (мында k — каалагандай бүтүн сан) башка бардык маанилеринде аныкталат. Ошол сыяктуу эле $\text{ctg}\,\alpha$ болсо α нын $k\pi$ ден (мында k — каалагандай бүтүн сан) башка бардык маанилеринде аныкталат десек болот.

СУРООЛОР

1. Эмне үчүн каалаган бурчтун тригонометриялык функцияларын (тангенс жана котангенс үчүн айрым маанилерди эсепке албаганда) аныктап алууга болот?

2. Каалаган бурчтун тригонометриялык функцияларын аныктоодо кайсыл геометриялык түшүнүктөр колдонулду?

3. $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ функцияларынын аныкталуу областтарын жана маанилеринин областтарын салыштыргыла. Эмнени байкадыңар?

4. $\text{tg}\,\alpha$ жана $\text{ctg}\,\alpha$ функцияларында кандай окшоштук жана айырмачылык бар?

КӨНҮГҮҮЛӨР

6. Чоңдугу 40°, 188°, -100°, 320°, -30° болгон бурчтардын ар бири кайсыл чейректе жата тургандыгын аныктагыла.

7. а) $\sin\alpha=0$; б) $\sin\alpha=-1$; в) $\cos\alpha=1$; г) $\cos\alpha=0$ боло тургандай, α нын бир нече маанилерин көрсөткүлө.

8. а) $\text{tg}\alpha=0$; б) $\text{ctg}\alpha=0$ боло тургандай α нын бир нече маанилерин көрсөткүлө.

9. а) $\sin\alpha=3$; б) $\cos\alpha=0{,}5$; в) $\text{tg}\,\alpha=1$; г) $\text{ctg}\,\alpha=250$ болушу мүмкүнбү?

10. а) $\sin\alpha+2$; б) $4-\cos\alpha$; в) $\sin\alpha-1$; г) $\cos\alpha+1$ туюнтмаларынын эң чоң жана эң кичине маанилери кайсы?

11. $\text{tg}\alpha$ жана $\cos\alpha$ α нын төмөнкү маанилеринин кайсынысында мааниге ээ болушпайт:

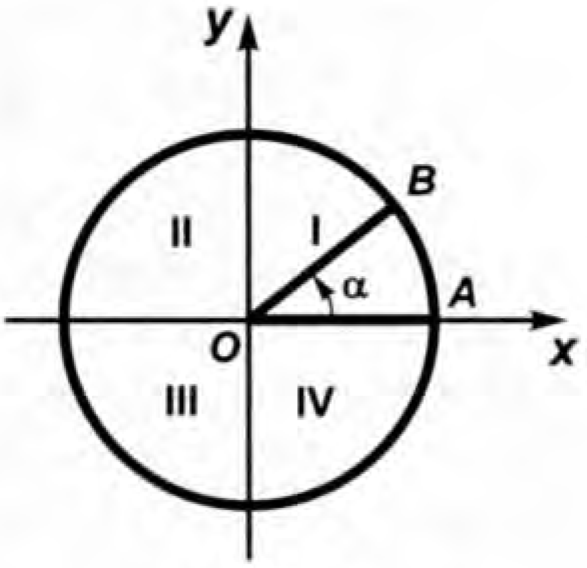
а) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; б) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; в) $\alpha=-\pi$; г) $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$?

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН КАСИЕТТЕРИ

Тригонометриялык функциялардын аныктамаларынан алардын белгилери (оң жана терс) кыймылдагы радиустун координаталарынын белгилеринен, б.а. анын учу кайсыл чейректе жаткандыгынан көз каранды болору келип чыгат.

51-сүрөттө чейректердин номерлениши көрсөтүлгөн. Кыймылдагы OB радиусу OA баштапкы радиусту оң багытка буруудан алынсын жана ал толук айлануу жасасын дейли (α бурчу 0дөн 2π ге чейин өзгөрөт). Ушул учурдагы анын учу болуп эсептелген B чекитинин координаталары кандай өзгөрө тургандыгын көрөбүз.

y координатасы B чекити айлананын жогорку жарымында жаткан учурда оң, ал эми төмөнкү жарымына өткөндө терс болорун байкоо кыйын эмес. Бурчтун синусунун белгиси y тин белгисинен көз каранды болгондуктан, I жана II чейректерде $\sin a>0$, ал эми III жана IV чейректерде $\sin a<0$ болот. Бурчтун косинусунун белгиси x тин белгисинен көз каранды болорун да аныктамадан билесиңер. x абциссасы B чекити айлананын оң жак жарымында жатса оң, ал эми сол жарымында жаткан учурда терс маани алат. Ошондуктан I жана IV чейректерде $\cos a>0$, II жана III чейректерде $\cos a<0$.



51-сүрөт.

$\text{tg}\alpha=\frac{y}{x}$, $\text{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ болгондуктан, ал функциялардын белгилери B чекитинин координаталары бирдей белгиге ээ болгон чейректерде оң, ар түрдүү белгилерге ээ болгон чейректерде терс болушат. Демек, I жана III чейректерде $\text{tg}\alpha>0$, $\text{ctg}\alpha>0$, ал эми II жана IV чейректерде $\text{tg}\alpha<0$, $\text{ctg}\alpha<0$ деген жыйынтыкка келебиз.

Тригонометриялык функциялардын белгилерин изилдөөнүн жыйынтыгы төмөнкү таблицада берилген:

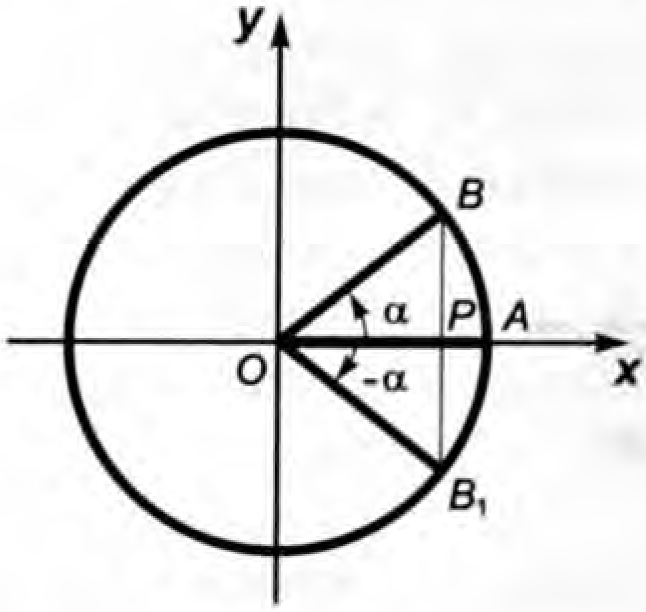
Чейректер Функциялар	I $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	III $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
sinα	+	+	–	–
cosα	+	–	–	+
tgα	+	–	+	–
ctgα	+	–	+	–

Биз жогоруда кыймылдагы радиус толук айланууу жасаган учурун карадык. Эгер ал радиус дагы кыймылга келсе, анда анын учу кайрадан эле мурдагы абалдарынын бирине келип турары белгилүү. Тагыраак айтканда, тригонометриялык функциялар 0дөн 2π ге чейинки алган маанилерине кайрадан ээ болушат. Ал маанилер айлануу бир нече жолу кайталанганда да өзгөрбөйт.

Тригонометриялык функциялардын аргументине толук айланууну (2π ни) бүтүн сан жолу кошсок, анда алардын маанилери өзгөрбөйт.

Мисалы, 51-сүрөттөгү OA радиусун α бурчуна буруудa деле, $\alpha+360^\circ$ ка, $\alpha+2\cdot 360^\circ$ ка ж. у. с. бурчтарга бурууда деле OB радиусу алынат, б. а. α , $\alpha+360^\circ$, $a+2\cdot 360^\circ$ ж. у. с. бурчтар үчүн тригонометриялык функциялар бир эле мааниге ээ болушат. Мындай касиеттерге ээ болгон функцияларды *мезгилдүү* функциялар деп аташат, алар жөнүндө 10-класста кеңирирээк каралат.

Биз негизинен $\alpha\geq 0$ болгон учурларды карап кеттик. Эми терс аргументтүү тригонометриялык функциялардын маанилерин оң аргументтүү тригонометриялык функциялардын маанилери аркылуу туюнтуучу формулаларды карайлы. Ал үчүн мурдагыдай эле тик бурчтуу координаталар системасында борбору координаталар башталышында жаткан, радиусу OA болгон айлананы алабыз (52-сүрөт). OA радиусун α бурчуна бурууда ал OB радиусуна, ал эми $-\alpha$ бурчуна бурууда OB_1 радиусуна өтсүн дейли. B жана B_1 чекиттерин туташтырсак, OBB_1 тең капталдуу үч бурчтугун алабыз. OP ал үч бурчтуктун BOB_1 бурчунун биссектрисасы болгондуктан, B жана B_1 чекиттери Ox огуна карата симметриялуу болушат. Абцисса огуна карата симметриялуу болгон чекиттер бирдей абциссага жана карама-каршы ординатага ээ болушарын билесинер. Ошон-



52-сүрөт.

дуктан B чекитинин координаталары жана y болсо, анда B_1 чекитиники x жана $-y$ болот. Мындан

$$\sin(-\alpha)=\frac{-y}{R}=-\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{-y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\frac{x}{R}=\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

болору келип чыгат. Бул барабардыктарды кыскача жазып, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ формулаларына ээ болобуз.

Мисал карайлы. -30° тук бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин табабыз:

$$\sin(-30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2}; \qquad \operatorname{tg}(-30^\circ)=-\operatorname{tg}(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos(-30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{ctg}(-30^\circ)=-\operatorname{ctg}(30^\circ)=-\sqrt{3}.$$

СУРООЛОР

1. Тригонометриялык функциялардын бардыгынын белгилери кайсыл чейректе оң болот? Эмне үчүн?

2. Координаталык чейректердеги синус менен косинус, тангенс менен котангенс функцияларынын белгилерин салыштыргыла. Эмнени байкадыңар?

3. Эмне үчүн α га 360° ту (2р ни), 2·360° ту (4р ни), 3·360° ту (6р ни) ж.у.с. толук бурчтун чоңдугуна эселүү сандарды кошууда sina нын, cosa нын, tga нын жана ctga нын маанилери өзгөрбөйт?

4. Кайсыл тригонометриялык функциянын мааниси аргументти анын карама-каршысына алмаштыруудан өзгөрбөйт? Эмне үчүн?

5. Аргументтин ага карама-каршы маани менен алмаштыруудагы өзгөрүшүнө жараша кайсы тригонометриялык функциялар бирдей касиетке ээ болушат? Ал касиетти өз сөзүңөр менен айтканга аракеттенгиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

12. Төмөнкү шарттар аткарылса, α бурчу кайсыл чейректе бүтүүгө тийиш:

а) $\sin\alpha>0$ жана $\operatorname{ctg}\alpha>0$;

б) $\sin\alpha<0$ жана $\operatorname{tg}\alpha<0$;

в) $\sin\alpha<0$ жана $\cos\alpha<0$;

г) $\cos\alpha<0$ жана $\operatorname{tg}\alpha>0$;

д) $\cos\alpha>0$ жана $\operatorname{ctg}\alpha<0$;

æ) $\cos\alpha>0$ жана $\sin\alpha>0$.

13. Төмөнкү таблицанын бош торчолоруна тригонометриялык функциялардын маанилеринин тиешелүү белгилерин («+» же «−») койгула:

Функциялар	15°	91°	306°	187°	204°	350°
$\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$						

14. Туюнтмалардын белгилерин аныктагыла:

а) $\sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg}25^\circ$; в) $\sin 300^\circ \cdot \cos37^\circ$;

б) $\cos 210^\circ \cdot \operatorname{tg}170^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 190^\circ \cdot \operatorname{ctg} 65^\circ$.

15. Төмөнкү туюнтмалар кандай белгилерге ээ болушат:

а) $\sin\frac{\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$?

16. α бурчунун мааниси 780° ка, 450° ка, 810° ка барабар болсо, $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $\operatorname{tg}\alpha$ нын жана $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

17. Эгер:

а) $\beta=\frac{7\pi}{3}$; б) $\beta=\frac{9\pi}{2}$; в) $\beta=\frac{9\pi}{4}$

болсо анда $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ жана $\operatorname{ctg}\beta$ канчага барабар болот?

18. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $\sin(-90^\circ)$; в) $\operatorname{tg}(-45^\circ)$; д) $\sin(-45^\circ)$;

б) $\cos(-45^\circ)$; г) $\operatorname{ctg}(-60^\circ)$; е) $\operatorname{tg}(-60^\circ)$.

19. Эсептегиле:

а) $\cos(-360^\circ)$; в) $\sin(-780^\circ)$;

б) $\operatorname{ctg}(-450^\circ)$; г) $\operatorname{tg}(-810^\circ)$.

20. Туюнтмалардын маанилерин салыштыргыла:

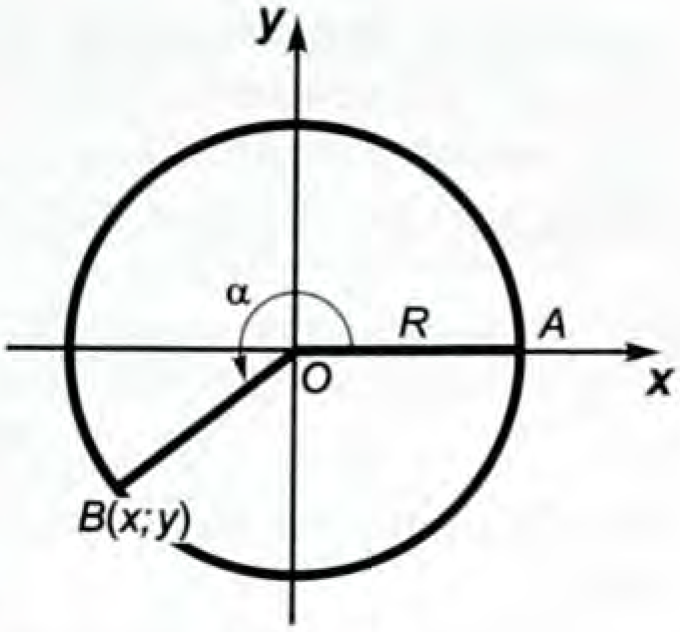
а) $\sin 45^\circ$ жана $\cos(-45^\circ)$; в) $\cos(-\frac{\pi}{3})$ жана $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{tg}(-60^\circ)$ жана $\operatorname{ctg}90^\circ$; г) $\sin(-\frac{\pi}{2})$ жана $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})$.

§ 4. БИРДЕЙ АРГУМЕНТТҮҮ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН АРАСЫНДАГЫ КАТНАШТАР

Тик бурчтуу координаталар системасында борбору анын башталышында жаткан жана радиусу $R=OA$ болгон айлананы алалы. OA радиусун α бурчуна буруудан OB радиусу алынсын дейли (53-сүрөт). Аныктама боюнча

$\sin\alpha=\frac{y}{R}$, $\cos\alpha=\frac{x}{R}$



53-сүрөт.

болору белгилүү (мында x бул B чекитинин абциссасы, ал эми y ординатасы). Мындан $y=R\sin\alpha$, $x=R\cos\alpha$ экендигин алабыз.

Берилген айлананын теңдемеси $x^2+y^2=R^2$ түрүндө болору белгилүү. B чекити ал айланада жаткандыктан, анын координаталары айлананын теңдемесин канааттандырат. Ошондуктан,

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2 .$$

Акыркы барабардыктан

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (1)$$

келип чыгат. (1) формуласы бирдей аргументтин синусу менен косинусунун арасындагы катнашты туюнтат.

B чекити айлананын координата окторунда жатса да (1) формула орун алат. Себеби бул учурда B чекитинин координаталарынын бирөө 1ге же −1ге, ал эми экинчиси 0гө барабар болуп калат. Демек, (1) формуласы α нын каалагандай мааниси үчүн туура болот.

(1) формуласын Пифагордун теоремасын колдонуу менен да чыгарууга болот. Аны өз алдыңарча аткарып көргүлө.

Тангенс жана котангенс функцияларынын аныктамаларын жана $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$ барабардыктарын эске алып, төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} .$$

Ошентип,

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

деген дагы эки формуланы алдык. (2) формуласы $\cos\alpha=0$, ал эми (3) формуласы $\sin\alpha=0$ болгон α нын бардык маанилери үчүн орун алат.

Бул үч формуланы *негизги тригонометриялык теңдештиктер* деп да аташат. Алардын жардамы менен бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялардын арасындагы катнашты туюндуруучу башка формулаларды алууга болот.

Мисалы, (2) жана (3) формулалардан

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \tag{4}$$

барабардыгына ээ болобуз. (4) формуласын өз алдыңарча чыгаргыла.

Негизги тригонометриялык теңдештиктерден бирдей аргументке ээ болушкан косинус жана тангенс функцияларынын, ошондой эле синус жана котангенс функцияларынын арасындагы катнашты туюндуруучу формулаларды да чыгарууга болот.

(1) формуласынын эки жагын тең $\cos^2\alpha$ га бөлөлү:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Мындан

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{5}$$

теңдештиги келип чыгат.

Ушул сыяктуу эле

$$\operatorname{ctg}^2+1=\frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{6}$$

формуласын алууга болот. (6) теңдештикти өз алдыңарча далилдегиле. (5) жана (6) формулалар α нын кандай маанилеринде орун ала тургандыгы жөнүндө ойлонуп көргүлө.

Ошентип, биз негизги тригонометриялык теңдештиктер менен катар дагы үч формулага ээ болдук. Бул формулалар тригонометриялык функциялардын биринин берилген мааниси боюнча калгандарынын маанилерин табууга мүмкүндүк берет. Аларды колдонууга бир катар мисалдарды карайлы.

1-мисал. $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ жана $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ экендиги белгилүү. $\sin\alpha$ ны жана $\operatorname{ctg}\alpha$ ны табуу талап кылынсын.

Адегенде эле айтып коё турган нерсе, α бул I чейректе жаткандыктан, аталган функциялардын тиешелүү маанилери оң болот.

(1) формуласынан $\sin^2\alpha=1\text{-}\cos^2\alpha$ же $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ келип чыгат. Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}.$$

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ны эмне үчүн оң белги менен алгандыгыбыз жөнүндө ойлонуп көргүлө.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ формуласынан $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$ болорун табабыз.

$\operatorname{ctg}\alpha$ ны табуу үчүн $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha=1$ формуласынан келип чыгуучу $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ барабардыгын пайдаланабыз:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}.$$

2 - мисал. $\operatorname{ctg}\alpha=-3$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсо, α бурчунун калган тригонометриялык функцияларынын маанилерин тапкыла.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ формуласын колдонуп, $\operatorname{tg}\alpha$ ны оңой эле табууга болот:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

Мында α бурчу II чейректе бүткөндүктөн, $\operatorname{tg}\alpha$ нын мааниси терс болуп калгандыгына көңүл буруу керек.

$\sin a$ ны табыш үчүн $ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ формуласын пайдаланабыз.

$$(-3)^2+1=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \ 10=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \ \sin^2\alpha=\frac{1}{10}.$$

Шарт боюнча α бурчу II чейректе бүтөт, ошондуктан анын синусу оң болот. Демек, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ формуласын пайдаланып, $\cos a$ ны табабыз. Бул учурда $\cos\alpha$ II чейректе терс мааниге ээ болорун эске алабыз.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{10}}=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}\ .$$

Ушул эле маанини $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ формуласын колдонуу менен тапсак да болот. Бул формуладан $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$ ны алабыз $\operatorname{ctg}\alpha$ менен $\sin\alpha$ нын маанилерин акыркы барабардыкка коюп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\cos\alpha=(-3)\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Өзүңөр байкагандай $\cos\alpha$ нын маанисин 2-жол менен табуу ыңгайлуураак.

3-мисал. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ экендиги белгилүү болсо, $\cos\alpha$ ны тапкыла.

$\sin\alpha > 0$ болуп жаткандыктан α бурчу же I, же II чейректе бүтөт. Биринчи учурда $\cos\alpha < 0$ болору белгилүү.

α бурчу кайсыл чейректе бүтөрү алдын ала берилбегендиктен, биз $\cos\alpha$ нын эки маанисин — оң жана терс маанилерин табышыбыз керек.

(1) формуладан төмөнкүнү алабыз

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

же $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}.$

Ошентип, эгер $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ болот.

СУРООЛОР

1. Бирдей аргументке ээ болгон синус менен косинустун байланышын көрсөткөн теңдештик кандайча жазылат?

2. Үч тригонометриялык функцияны байланыштырган формулалар кайсылар?

3. Бирдей аргументтин тангенси менен котангенсинин арасындагы катнашты кайсыл формула туюнтат?

4. Эки гана тригонометриялык функцияны байланыштырган дагы кандай формулалар бар?

5. Бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялардын байланыштарын туюндуруучу теңдештиктерди кандай максатта же кайсыл учурда колдонобуз?

КӨНҮГҮҮЛӨР

21. $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ жана $\cos\alpha > 0$ болсо, α бурчу кайсыл чейректе бүтөрүн аныктагыла.

22. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ шартын пайдаланып, төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) $\cos\alpha = 0{,}8$ болсо, $\sin\alpha$ ны;

б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ болсо, $\cos\alpha$ ны;

в) $\operatorname{tg}\alpha = -2$ болсо, $\sin\alpha$ ны;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ болсо, $\cos\alpha$ ны.

23. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ шартын пайдаланып, төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ болсо, $\operatorname{ctg}\alpha$ ны;

б) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ болсо, $\sin\alpha$ ны;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ болсо, $\cos\alpha$ ны;

г) $\sin\alpha = 0{,}3$ болсо, $\cos\alpha$ ны.

24. Бир эле учурда $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ тиешелүү түрдө:

а) $\frac{3}{5}$ кө жана $-\frac{4}{5}$ кө;

б) $\frac{8}{15}$ ге жана $\frac{11}{15}$ ге;

в) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ге жана $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ке барабар болушу мүмкүнбү?

25. Бир эле учурда: а) $\text{tg}\alpha=\frac{4}{5}$, $\text{ctg}a=1{,}25$; б) $\text{tg}\alpha=2+\sqrt{5}$, $\text{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$; в) $\text{tg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{ctg}a=3$ боло алышабы?

26. α бурчу III чейректе бүтөрү белгилүү. Эгер $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ болсо, анда $\sin\alpha$ ны, $\text{tg}\alpha$ ны жана $\text{ctg}\alpha$ ны тапкыла.

27. $\text{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$ болсо, α бурчунун башка тригонометриялык функцияларынын маанилерин эсептегиле.

28. Эгер $\sin\alpha=-\frac{12}{37}$ болсо, анда $\cos\alpha$ ны, $\text{tg}\alpha$ ны жана $\text{ctg}\alpha$ ны тапкыла.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТУЮНТМАЛАРДЫ ӨЗГӨРТҮҮ, ТЕҢДЕШТИКТЕРДИ ДАЛИЛДӨӨ

Мурдагы параграфта бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялардын арасындагы катнаштарды туюнтуучу формулалар чыгарылды. Ошондой эле аларды тригонометриялык функциялардын биринин берилген мааниси боюнча калгандарынын маанисин табууда колдонуу каралды. Ошол эле формулалар тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүү жана теңдештиктерди далилдөө максатында колдонулат. Бир катар мисалдарды карайлы.

1 - мисал. $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

Мурдагы параграфта каралган (1) формуласы боюнча

$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

га ээ болобуз. Аны туюнтмага коюп, (2) формуласын колдонсок, төмөнкү келип чыгат:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\text{tg}^2\alpha\ .$$

2 - мисал. $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

$$\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=\frac{-(1-\sin^2\alpha)}{-(1-\cos^2\alpha)}+1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\text{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3-мисал. $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө жана $\alpha=\frac{\pi}{3}$ болгондогу анын маанисин тапкыла.

Адегенде берилген туюнтманы төмөндөгүдөй жөнөкөйлөтөбүз:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Эми α нын ордуна $\frac{\pi}{3}$ тү коёбуз: $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

Мындан, туюнтманын маанисин табуу үчүн алдын ала аны жөнөкөйлөтүп алган жакшы экендиги көрүнүп турат.

4-мисал. $(\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha)^2+(\mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha)^2=1$ теңдештигин далилдегиле.

Теңдештиктин сол жагын өзгөртүп оң жагын алабыз:

$$(\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha)^2+(\mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha)^2=(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha)^2+(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Теңдештик далилденди.

Эскертүү. Теңдештиктерди далилдөөдө үч жол колдонулат: 1) барабардыктын сол жагын өзгөртүү менен анын оң жагындагы туюнтманы алуу; 2) барабардыктын оң жагын өзгөртүү менен анын сол жагындагы туюнтманы алуу; 3) барабардыктын эки жагын тең өзгөртүү менен бир эле туюнтма алуу.

Жогоруда биз 1-жолду колдондук. Теңдештиктерди далилдөөнүн ыңгайлуу жолун тандап алуу маанилүү.

СУРООЛОР

1. Туюнтмаларды жөнөкөйлөтүү деп эмнени түшүнөсүңөр?

2. Теңдештиктерди далилдөө деген эмне?

3. Туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө, теңдештиктерди далилдөөдө эмнелерди колдонобуз?

КӨНҮГҮҮЛӨР

29. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $1-\sin^2\alpha$;

б) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

в) $\cos^2\alpha+1+\sin^2\alpha$;

г) $1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$;

д) $\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$;

е) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

30. Туюнтмаларды өзгөртүп түзгүлө:

а) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha$;

б) $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$;

в) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\alpha$;

г) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$;

д) $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}-\mathrm{ctg}\alpha$;

е) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}+1$.

31. $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ны адегенде синус аркылуу, андан кийин косинус аркылуу туюнткула.

32. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ бөлчөгүн $\operatorname{tg}\alpha$ аркылуу туюнткула.

33. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sin^2a+\sin a\cos a+\cos^2a-1$;
в) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\cos\alpha$;

б) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha$;
г) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.

34. Төмөнкү бөлчөктөрдү бүтүн туюнтмага теңдеш өзгөрткүлө:

а) $\frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$;
б) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

35. $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө жана $\alpha=-30^\circ$ болгондогу анын маанисин тапкыла.

36. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө жана $\alpha=\frac{\pi}{3}$ болгондогу анын маанисин эсептегиле.

37. Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $(\frac{1}{\cos\alpha}-1)\operatorname{ctg}\alpha=1$;
в) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}^3\alpha$;

б) $(1-\frac{1}{\sin^2\alpha})\operatorname{tg}^2\alpha=-1$;
г) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=1$.

38. Төмөнкү барабардыктардын β нын кабыл алууга мүмкүн болгон маанилеринде туура экендигин далилдегиле.

а) $\frac{1}{1+\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta}=\frac{2}{\cos^2\beta}$;
в) $\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}(-\beta)\cos\beta}{\sin\beta}=-1$;
г) $\frac{\sin\beta+\operatorname{tg}\beta}{1+\cos\beta}=\operatorname{tg}\beta$.

39. Эгер:

а) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$ болсо, $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ туюнтмасынын маанисин;

б) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{5}$ болсо, $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ туюнтмасынын маанисин;

в) $\operatorname{tg}\alpha=2$ болсо, $\frac{3\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$ туюнтмасынын маанисин эсептегиле.

40. $\sin\alpha+\cos\alpha=k$ болсо, төмөнкүлөрдү тапкыла:
а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$; в) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

Көрсөтмө. а) $\sin\alpha+\cos\alpha=k$ барабардыгынын эки жагын тең квадратка көтөрүү керек.

41. Эсептегиле:

а) $\cos 60^\circ + 2\sin 30^\circ + \frac{1}{2} tg^2 60^\circ - ctg 45^\circ$;

б) $3\cos 180^\circ + 5\mathrm{ctg} 270^\circ - 2\mathrm{tg} 0^\circ + 3\mathrm{tg} 180^\circ - \mathrm{tg} 60^\circ$.

42. Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\mathrm{tg}^2\alpha$;

б) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

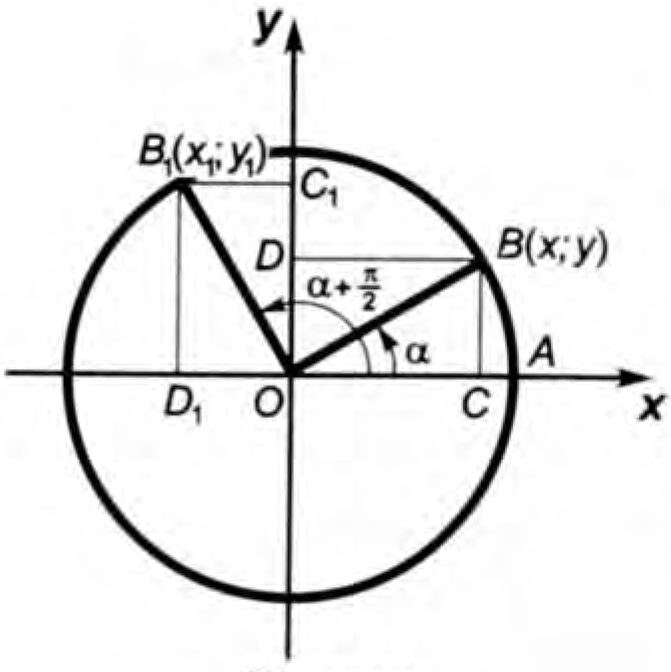
в) $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\cos^3\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

§ 6. КЕЛТИРҮҮНҮН ФОРМУЛАЛАРЫ

Тригонометрияда каалагандай бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин тар бурчтун тригонометриялык формулаларына келтирип алуу маанилүү. Башкача айтканда, $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ түрүндөгү (мында k — каалагандай бүтүн сан, α — тар бурч) бурчтардын тригонометриялык функцияларын α бурчунун тригонометриялык функциялаларына келтирүү кыйла ыңгайлуу болот. Мында келтирүүнүн формулалары деген атайын формулалар колдонулат.

Биз $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ туюнтмасында k саны 1ден 4кө чейинки маанигe ээ болгон учурлар, б.а. $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ бурчтары үчүн гана келтирүүнүн формулаларын карайбыз. Бул сыяктуу башка бурчтар (k нын бүтүн маанилерине туура келүүчү калган бурчтар) жогорудагы бурчтарга толук бурчтардын чоңдуктарын: 2π ни, 4π ни, 6π ни ж.б. кошуу аркылуу алынат.

Келтирүүнүн формулаларын адегенде синус жана косинус үчүн чыгарабыз. Алардан тангенс жана котангенс үчүн келтирүүнүн формулаларын оңой эле алууга болот.



54-сүрөт.

II чейректе бүткөн бурчтун синусу жана косинусу үчүн келтирүүнүн формулаларын чыгаралы. II чейректе бүткөн каалагандай бурчту $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (мында α тар бурч) түрүндө көрсөтүп алууга болот. Айлананын $R=OA$ радиусун O чекитинин айланасында α бурчуна жана $\frac{\pi}{2}+\alpha$ бурчуна бурабыз (54-сүрөт). Мында OA радиусу ошого жараша OB жана OB_1 радиустарына өтөт. B жана B_1 чекиттеринен координата окторуна перпендикуляр түшүрөбүз. Натыйжада $OCBD$ жана $OC_1B_1D_1$ тик бурчтуктарына ээ болобуз. $OC_1B_1D_1$ тик бурчтугу $OCBD$ тик бурчтугун O чекитинин айланасында $\frac{\pi}{2}$ бурчуна буруудан алына тургандыгына оңой эле ишенүүгө болот . Чындыгында эле $\angle BOB_1 = \frac{\pi}{2}$ болгондуктан бул бурууда B чекити B_1 чекитине өтөт. Ошондой эле C чекити C_1 чекитине, ал эми D чекити D_1 чекитине өтөт.

Ошондуктан B_1 чекитинин ординатасы катары B чекитинин абциссасын, ал эми B_1 чекитинин абциссасы катары B чекитинин ординатасына карама-каршы санды алууга болот:

$$y_1 = x \quad \text{жана} \quad x_1 = -y,$$

же

$$\frac{y_1}{R} = \frac{x}{R} \quad \text{жана} \quad \frac{x_1}{R} = -\frac{y}{R},$$

мындан

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{y_1}{R}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{R}, \; \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{x_1}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{R}$$

болорун эске алып,

$$\sin(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)) = \cos\alpha; \;\; \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \tag{1}$$

га ээ болобуз.

$\frac{\pi}{2} - \alpha$ бурчу үчүн келтирүүнүн формулаларын чыгаруу максатында (1) формуласында α ны $-\alpha$ менен алмаштырабыз.

Анда

$$\sin(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Ошентип, дагы эки формулага ээ болдук:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \tag{2}$$

Бул формулалар α тар бурч болгон учурда гана эмес, каалагандай α бурчу үчүн да туура болот.

Эми $\pi + \alpha$ бурчунун синусу жана косинусу үчүн келтирүүнүн формулаларын далилдейли. Ал үчүн $\pi + \alpha$ ны $\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} + \alpha)$ түрүндө көрсөтүп алып, (1) формуласын эки жолу колдонсок болот:

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} + \alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} + \alpha)) = -\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Демек,

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha. \tag{3}$$

(3) формуласынан $\pi-\alpha$ бурчунун синусунун жана косинусунун формуласын оңой эле алууга болот:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha; \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha. \tag{4}$$

Мында (3) формуласынан $\pi-\alpha$ ны $\pi+(-\alpha)$ түрүндө көрсөтүп алуу керек. Далилдөөнү өз алдыңарча жүргүзгүлө.

Эми $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ бурчунун синусу жана косинусу үчүн келтирүүнүн формулаларын чыгаралы. Бул жерде деле (3) формуланы чыгарган ыкманы колдонобуз. Б.а., $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ ны $\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)$ түрүндө көрсөтүп алабыз да, андан кийин (1) жана (3) формулаларын удаалаш колдонобуз:

$$\sin(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin(\tfrac{\pi}{2}+(\pi+\alpha))=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=\cos(\tfrac{\pi}{2}+(\pi+\alpha))=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha.$$

$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ бурчунун синусу жана косинусу үчүн келтирүүнүн формулаларын өз алдыңарча чыгарууга аракеттенгиле.

$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ жана $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ бурчтары үчүн келтирүүнүн формулаларын өз-өзүнчө сапка жазалы:

$$\sin(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha. \tag{5}$$

$$\sin(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2}\alpha)=-\sin\alpha. \tag{6}$$

Акырында, $2\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$ бурчтарынын синустары жана косинустары үчүн келтирүүнүн формулаларын чыгаралы. Адегенде $2\pi+\alpha$ үчүн келтирүүнүн формулаларын карайбыз. α бурчуна толук бурчту кошкондо анын чоңдугу, демек, тригонометриялык функциялардын маанилери өзгөрбөй тургандыгы белгилүү. Ошондуктан,

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha, \ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha \tag{7}$$

деп жазып алууга болот, (7) формуласынан

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha, \ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \tag{8}$$

формулалары келип чыгат.

(1)—(8) формулаларынан тангенс жана котангенс үчүн келтирүүнүн формулаларын оңой эле чыгарып алууга болот. Ал формулалар төмөнкүлөр:

$$\mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\mathrm{tg}\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\alpha;$$

$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}\alpha$;

$\mathrm{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{ctg}\alpha$.

Бул формулаларды өз алдыңарча далилдегиле.

Келтирүүнүн формулаларынын бардыгын бир таблицага түшүрөлү. Таблицадан эмнени байкоого болот?

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90^\circ+\alpha)$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90^\circ-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180^\circ+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180^\circ-\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270^\circ+\alpha)$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270^\circ-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360^\circ+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360^\circ-\alpha)$
sin*x*	cos*x*	cos*x*	− sin*x*	sin*x*	− cos*x*	− cos*x*	sin*x*	− sin*x*
cos*x*	− sin*x*	sin*x*	− cos*x*	− cos*x*	sin*x*	− sin*x*	cos*x*	cos*x*
tg*x*	− ctg*x*	ctg*x*	tg*x*	− tg*x*	− ctg*x*	ctg*x*	tg*x*	− tg*x*
ctg*x*	− tg*x*	tg*x*	ctg*x*	− ctg*x*	− tg*x*	tg*x*	ctg*x*	− ctg*x*

Төмөнкү суроолорго жооп тапканга аракет кылып көргүлө:

1. Кайсыл учурда функция өзгөрүүсүз калат?

2. Кайсыл учурда функция аты уйкаш функцияга (синус-косинуска, тангенс-котангенске жана тескерисинче) өзгөрөт?

3. Келтирүүнүн формулаларынын оң жагындагы функциянын белгисин кантип аныктоого болот?

Бул суроолорго туура жооп берүү менен төмөнкүдөй тыянактарга келүүгө болот:

1) эгер келтирилүүчү тригонометриялык функциянын аргументи (бурч) $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ ($180^\circ\pm\alpha$, $360^\circ\pm\alpha$) түрүндө болсо, анда анын аты өзгөрбөйт;

2) эгер келтирилүүчү тригонометриялык функциянын аргументи $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ ($90^\circ\pm a$, $270^\circ\pm a$) түрүнө ээ болсо, анда ал аты уйкаш функцияга өзгөрөт;

3) келтирүүнүн формулаларынын оң жагы келтирилүүчү функция тиешелүү чейректе кандай белгиге ээ болсо, ошол белги менен жазылат.

Мисалдарды карайлы.

1. $\sin100^\circ=\sin(90^\circ+10^\circ)=\cos10^\circ$.

Мында бурч $\frac{\pi}{2}+\alpha$ түрүнө ээ болгондуктан келтирилүүчү функция (синус) аты уйкашына (косинуска) өзгөрдү. Ал эми 100° экинчи чейректе бүткөндүктөн жана ал чейректе синус оң болгондуктан, белгиси өзгөрүүсүз калды.

2. $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

3. $\mathrm{tg}135^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ-45^\circ)=-\mathrm{tg}45^\circ=-1$.

4. $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}=\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

СУРООЛОР

1. Каралып кеткен формулаларды эмне үчүн келтирүүнүн формулалары деп атайбыз?

2. Келтирүүнүн формулалары кандай максатта колдонулат?

3. Келтирүүнүн формулалары тар бурч үчүн гана туура болобу же каалагандай бурч үчүн да орун алабы?

КӨНҮГҮҮЛӨР

43. $\sin350^\circ$ ту, $\cos220^\circ$ ту жана $\mathrm{tg}105^\circ$ ту тар бурчтун аты уйкаш функцияларына келтиргиле.

44. $\sin165^\circ$ ту, $\cos245^\circ$ ту, $\mathrm{ctg}324^\circ$ ту тар бурчтун ошол эле функцияларына келтиргиле.

45. $\cos110^\circ$ ту, $\sin205^\circ$ ту, $\mathrm{tg}310^\circ$ ту жана $\mathrm{ctg}73^\circ$ ту 45° тан кичине бурчтун функцияларына келтиргиле.

46. Төмөнкү тригонометриялык туюнтмалардын маанилерин эсептегиле:

а) $\sin210^\circ$; в) $\sin\frac{5\pi}{2}$; д) $\mathrm{tg}(-405^\circ)$;

б) $\cos(-240^\circ)$; г) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$; е) $\mathrm{ctg}(-150^\circ)$.

47. $\cos(-1000^\circ)$ ту, $\mathrm{tg}(-\frac{29\pi}{11})$ ни, $\sin\frac{34\pi}{9}$ ни жана $\mathrm{ctg}500^\circ$ ту тар бурчтун тригонометриялык функцияларына келтиргиле.

48. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө жана a нын берилген мааниси үчүн алардын маанилерин эсептегиле:

а) $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ болсо, $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)-\mathrm{tg}(-\alpha)$ нын маанисин;

б) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ болсо, $\cos(\pi-\alpha)-\cos(-\alpha)$ нын маанисин;

в) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ болсо, $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\sin(-\alpha)$ нын маанисин;

г) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$ болсо, $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)$ нын маанисин.

49. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sin(\alpha-\pi)$; в) $\mathrm{tg}(\alpha-2\pi)$;

б) $\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})$; г) $\mathrm{ctg}(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

50. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos(360^\circ-\alpha)$;
б) $\sin(360^\circ+\alpha)$;
в) $\mathrm{ctg}(270^\circ+\alpha)$;
г) $\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)$;
д) $\sin(\alpha-90^\circ)$;
е) $\mathrm{ctg}(\alpha-360^\circ)$;
ж) $\mathrm{tg}(\alpha-180^\circ)$;
з) $\cos(\alpha-270^\circ)$.

51. Туюнтмаларды теңдеш өзгөрткүлө:

а) $\sin(\pi-x)\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{2})$;
б) $\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\mathrm{ctg}(\pi-x)$;
в) $\mathrm{tg}1845^\circ\sin460^\circ$;
г) $\sin\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}$.

52. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $4\sin120^\circ\mathrm{tg}300^\circ$;
б) $3\cos240^\circ-2\mathrm{tg}240^\circ$;
в) $8\sin510^\circ\cos(-300^\circ)\mathrm{tg}240^\circ$;
г) $10\mathrm{ctg}315^\circ\sin(-150^\circ)\cos225^\circ$.

53. Төмөнкү туюнтмалардын маанилери эмнеге барабар:

а) $2\sin^2 225^\circ-\mathrm{ctg}330^\circ\,\mathrm{tg}405^\circ$;
б) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$;
в) $\frac{\cos(-120^\circ)}{\cos300^\circ}$;
г) $\frac{\mathrm{tg}210^\circ\sin315^\circ}{\cos180^\circ}$.

54. Эгер a, b жана g үч бурчтуктун бурчтары болушса, анда:

а) $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$;
б) $\cos\beta=-\cos(\alpha+\gamma)$;
в) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$;
г) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

барабардыктары аткарыларын далилдегиле.

55. Теңдештикти далилдегиле:

а) $\frac{\sin(\pi-x)\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\mathrm{ctg}(\pi-x)}=1$;
б) $\sin\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}=0$;
в) $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(x-\frac{3\pi}{2})$;
г) $\sin(7\pi-x)=\sin(3\pi-x)$.

56. a нын мүмкүн болгон бардык маанилеринде төмөнкү барабардыктардын туура экендигин көрсөткүлө:

а) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}=1$;

б) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\sin(270^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(30^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)}=-\cos\alpha$;

в) $\frac{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=\sin\alpha$.

57. β нын мүмкүн болгон бардык маанилеринде:

а) $\sin(\beta-\pi)+\operatorname{tg}(\beta-\pi)-\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)=\operatorname{tg}\beta$;

б) $\dfrac{\sin(\pi+\beta)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\beta)}-\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+\beta)}{\operatorname{ctg}(\pi-\beta)}+\operatorname{tg}(\pi-\beta)=-1$;

в) $\dfrac{\sin(90^{\circ}+\beta)+\cos(270^{\circ}-\beta)}{\operatorname{ctg}(180^{\circ}+\beta)+\operatorname{tg}(360^{\circ}-\beta)}=\dfrac{\sin(180^{\circ}-\beta)\cdot\sin(90^{\circ}+\beta)}{\cos(-\beta)-\cos(270^{\circ}-\beta)}$

экенин далилдегиле.

58. Эгер:

а) $x=315^{\circ}$ болсо, $\sin x+2\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $x=225^{\circ}$ болсо, $2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=1$ болорун далилдегиле.

59. $\sin(180^{\circ}+\alpha)=-\frac{1}{2}$ экендиги белгилүү болсо:

а) $\sin(270^{\circ}+a)$ ны;

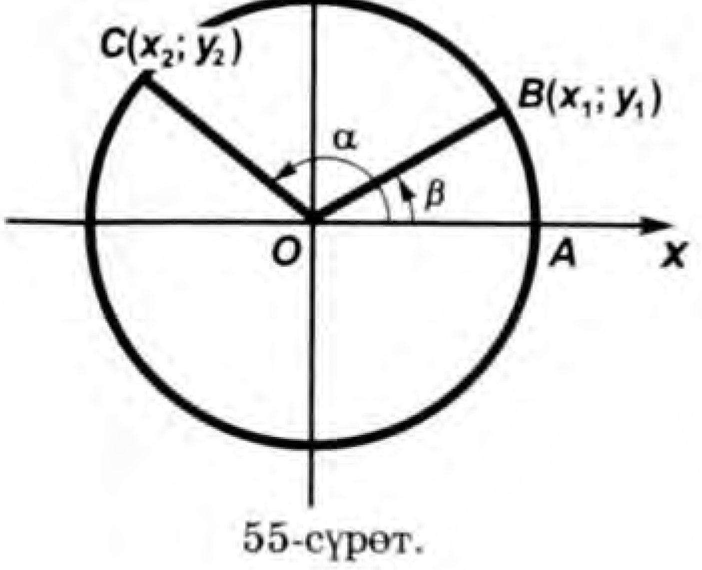
б) $\cos(90^{\circ}+a)$ ны;

в) $\operatorname{tg}(a+270^{\circ})$ ту;

г) $\operatorname{ctg}(a-180^{\circ})$ ту эсептегиле.

§ 7. КОШУУНУН ФОРМУЛАЛАРЫ

Биз буга чейин бирдей аргументүү тригонометриялык функциялардын өз ара катнаштарын туюнтуучу формулаларды жана келтирүүнүн формулаларын карап кеттик. Тригонометрияда ошолор сыяктуу эле мааниге ээ болгон *кошуунун формулалары* деп аталышкан формулалар өтө кенири колдонулат. Кошуунун формулалары деп эки бурчтун суммасынын жана айырмасынын тригонометриялык функцияларын ал бурчтардын тригонометриялык функциялары аркылуу туюнтууга мүмкүндүк берүүчү формулаларды айтабыз.



55-сүрөт.

Адегенде эки бурчтун айырмасынын косинусун ал бурчтардын тригонометриялык функциялары менен туюндуруучу формуланы чыгарабыз. Ал үчүн адаттагыдай эле тик бурчтуу координаталар системасында борбору координаталар башталышында жаткан радиусу $R=OA$ болгон айлананы карайбыз (55-сүрөт).

OA радиусун O чекитинин айланасында α бурчуна чейин буруу аркылуу тиешелүү түрдө OB жана OC радиустарын алабыз. OA, OB жана OC радиустарынын башталышы O чекити жана учтары A, B жана C чекиттери болуп эсептелген векторлор катары да карасак болот. B чекитинин координаталары x_1 жана y_1, ал эми C чекитинин координаталары x_2 жана y_2 болгондуктан (12-сүрөт), $\overline{OB}$ жана $\overline{OC}$ векторлору да тиешелүү түрдө ошол эле координаталарга ээ болушарын геометрия курсунан билесинер.

Эми $\overline{OB}$ жана $\overline{OC}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн табабыз. Геометрия курсунда окуп үйрөнүлгөн векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн аныктамасынын негизинде

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=x_1x_2+y_1y_2 \qquad (1)$$

ге ээ болобуз.

Косинустун жана синустун аныктамалары боюнча

$$x_1=R\cos\alpha,\ \ y_1=R\sin\alpha,\ \ x_2=R\cos\beta,\ \ y_2=R\sin\beta$$

болорун билесинер. Бул маанилерди (1) барабардыгына коюп төмөндөгүнү алабыз:

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos\alpha\cos\beta+R^2\sin\alpha\sin\beta=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

Ошентип,

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta). \qquad (2)$$

(2) барабардыгынын оң жагын векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү жөнүндөгү теореманы колдонуу менен өзгөртсөк

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|\cos\angle BOC \qquad (3)$$

барабардыгы келип чыгат.

$\overline{OB}$ жана $\overline{OC}$ векторлорунун арасындагы BOC бурчу же $\alpha-\beta$ га (56-сүрөт), же $2\pi-(\alpha-\beta)$ га барабар болушу же алардан бүтүн санга эселүү толук бурчтун чоңдугуна айырмаланышы мүмкүн. Ошондуктан бул учурлардын бардыгында $\cos\angle BOC=\cos(\alpha-\beta)$ болот. Бул барабардыкты жана $|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=R$ экендигин эске алып, (3) барабардыгынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R\cdot R\cos(\alpha-\beta)$$

жана

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos(\alpha-\beta) \qquad (4)$$

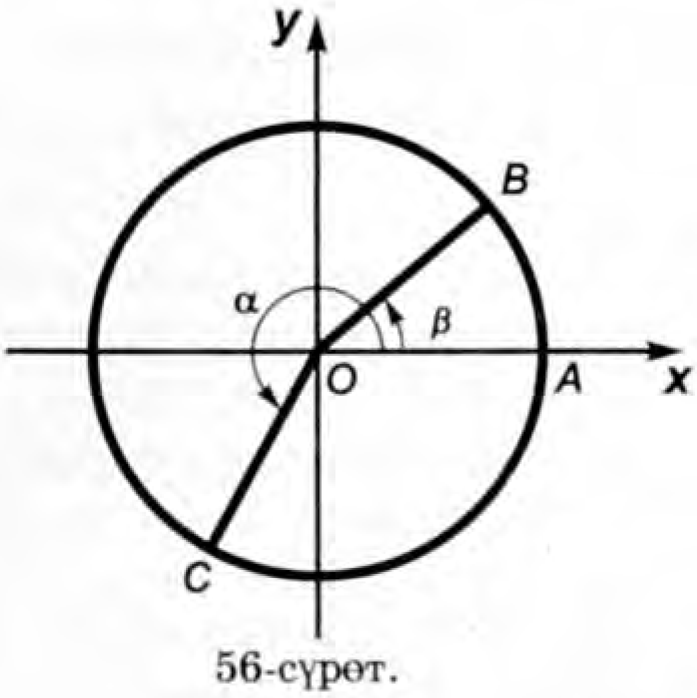
(2) жана (4) барабардыктарынын сол жактары барабар, демек, алардын оң жактары да барабар болууга тийиш:

$$R^2\cos(\alpha-\beta)=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

мындан

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

болору келип чыгат. (5)



56-сүрөт.

Эки бурчтун айырмасынын косинусу ал бурчтардын косинустарынын көбөйтүндүсүнө ошол эле бурчтардын синустарынын көбөйтүндүсүн кошконго барабар.

(5) формуласын *айырманын косинусунун формуласы* деп айтышат. (5) формуласын колдонуп, эки бурчтун суммасынын косинусунун, б.а. сумманын косинусунун формуласын оңой эле алууга болот:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta .$$

Ошентип, биз *сумманын косинусунун* формуласы деп аталган

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (6)$$

формуласына ээ болдук.

Эки бурчтун суммасынын косинусу ал бурчтардын косинустарынын көбөйтүндүсүнөн ошол эле бурчтардын синустарынын көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.

Эми эки бурчтун суммасынын жана айырмасынын синустарынын, тангенстеринин, котангенстеринин формулаларын чыгаруу анча татаал болбойт. Сумманын синусунун формуласын чыгаруу үчүн (5) формуласын жана келтирүүнүн формулаларын колдонобуз:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=\cos((\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)=$$

$$=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta .$$

Демек,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta . \qquad (7)$$

Эки бурчтун суммасынын синусу биринчи бурчтун синусу менен экинчи бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүн биринчи бурчтун косинусу менен экинчи бурчтун синусунун көбөйтүндүсүнө кошконго барабар.

Айырманын синусунун формуласын (7) формуласын колдонуп оңой эле алууга болот:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta .$$

Мындан айырманын синусунун формуласы келип чыгат:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta . \qquad (8)$$

Эки бурчтун айырмасынын синусу биринчи бурчтун синусу менен экинчи бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнөн биринчи бурчтун косинусу менен экинчи бурчтун синусунун көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.

Тангенс жана котангенс үчүн кошуунун формулалары аларды синус жана косинус аркылуу туюнтуучу формулаларынын жана (5)—(8) формулаларынын жардамы менен оңой эле чыгарылат. Алар төмөнкүлөр:

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}; \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta)=\frac{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}.$$

Булардын ичинен $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$ формуласын далилдейли.

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

Калган формуларды өз алдынарча далилдегиле.

Кошуунун формулаларын колдонуууга бир катар мисал көрсөтөлү.

1 - мисал. $\cos 105^\circ$ ту таблицаны жана микрокалькулятор-ду колдонбостон эсептейли.

105° ту $60^\circ+45^\circ$ суммасы түрүндө жазып алабыз. Анда

$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ=$
$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$.

2 - мисал. $\sin(a+b)-\sin(a\text{-}b)$ туюнтмасын жөнөкөйлөтөлү.

Мында сумманын жана айырманын синусунун формулаларын колдонуууга туура келет. Төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\sin\beta.$$

3 - мисал. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{3}$, α жана β тар бурчтар болушса, анда $\alpha+\beta$ ны табалы.

Сумманын тангенсинин формуласын колдонуп:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$$

экенин алабыз. Демек, $\alpha+\beta=45^\circ$ болот.

СУРООЛОР

1. Кандай формулаларды кошуунун формулалары деп айтабыз? Алар эмне үчүн мындай аталышат?

2. Кошуунун формулалары кандай максаттарда колдонулат?

3. Айырманын косинусунун формуласын чыгарууда кайсы түшүнүктөргө таяндык? Калган формулаларды чыгаруудачы?

КӨНҮГҮҮЛӨР

60. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:
а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\alpha$;
б) $\sin(x+45^\circ)\cos(x-45^\circ)-\cos(x+45^\circ)\sin(x-45^\circ)$.

61. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:
а) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$; б) $\frac{(\text{tg}5x-\text{tg}4x)\text{ctg}x}{1+\text{tg}5x\text{tg}4x}$.

62. Төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла:
а) $\cos24^\circ\cos31^\circ-\sin24^\circ\sin31^\circ-\cos55^\circ$;
б) $\cos107^\circ\cos17^\circ+\sin107^\circ\sin17^\circ$;
в) $\sin63^\circ\cos27^\circ+\cos63^\circ\sin27^\circ$;
г) $\sin51^\circ\cos21^\circ-\cos51^\circ\sin21^\circ$.

63. а) $\sin\alpha=\frac{8}{18}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α жана β тар бурчтар болсо, анда $\sin(\alpha+\beta)$ ны, $\cos(\alpha+\beta)$ ны жана $\cos(\alpha-\beta)$ ны тапкыла;

б) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$, α жана β тар бурчтар болсо, анда $\sin(\alpha+\beta)$ ны жана $\cos(\alpha+\beta)$ ны тапкыла;

в) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α жана β тар бурчтар болсо, анда $\cos(\alpha+\beta)$ ны жана $\cos(\alpha-\beta)$ ны аныктагыла.

64. α жана β бурчтары IV чейректе бүтсө жана $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$ болсо, анда $\sin(\alpha+\beta)$ ны, $\sin(\alpha-\beta)$ ны, $\cos(\alpha+\beta)$ ны, $\cos(\alpha-\beta)$ ны, $\text{tg}(\alpha+\beta)$ ны жана $\text{tg}(\alpha-\beta)$ ны эсептегиле.

65. α жана β тар бурчтары үчүн $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ жана $\sin\beta=\frac{15}{17}$ болсо, анда $\alpha+\beta=90^\circ$ болорун көрсөткүлө.

66. $\text{tg}\alpha=2$ жана $0<\alpha<90^\circ$ болсо, анда $\text{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})$ тү тапкыла.

67. $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ жана $\text{tg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ болсо, $\text{tg}(\alpha+\beta)$ нын маанисин эсептегиле.

68. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\text{tg}\beta=\frac{5}{12}$, α жана β тар бурчтар болушса, анда $\sin(a-\beta)$ ны тапкыла.

69. $\text{tg}a=2$, $\text{tg}\beta=3$, α жана β тар бурчтар болушса, анда $\alpha+\beta=135^\circ$ экендигин далилдегиле.

70. $\cos\alpha=0{,}8$, $\cos\beta=\frac{15}{17}$ (α жана β — тар бурчтар) болсо, $\sin(\alpha-\beta)$ ны тапкыла.

71. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sin 90^\circ - \mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)}{\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)}$;

б) $1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

в) $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)\cdot\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$;

г) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta$.

72. Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha)$;

б) $\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)=\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)$;

в) $\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)=\cos\alpha$;

г) $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}=\mathrm{tg}\alpha$;

д) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=tg\alpha$.

73. Төмөнкү барабардыктардын тууралыгын көрсөткүлө:

а) $\sin 25^\circ\cos 35^\circ+\cos 25^\circ\sin 35^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin 200^\circ\sin 310^\circ+\sin 340^\circ\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos\alpha$;

г) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

§ 8. ЭКИ ЭСЕЛЕНГЕН БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ

Тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө, теңдештиктерди далилдөөдө ж. б. учурларда эки эселенген бурчтун тригонометриялык функцияларын ал бурчтун өзүнүн тригонометриялык функциялары аркылуу туюндуруп алууга туура келет. Б. а. 2α бурчунун синусу, косинусу, тангенси жана котангенси α бурчунун тригонометриялык функциялары аркылуу туюндурулат.

Эки эселенген бурчтун формулаларын, кошуунун формулаларын колдонуп, оңой эле чыгарып алууга болот. Мисалы, $\sin 2\alpha$ ны α бурчунун тригонометриялык функциялары аркылуу туюнтуу үчүн

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

формуласындагы β ны α менен алмаштырабыз:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Ошентип,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$

формуласына ээ болдук. Ушул сыяктуу эле

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \qquad (4)$$

формулаларын өз алдынарча далилдегиле.

(1)—(4) формулалары *эки эселенген бурчтун формулалары* деп аталышат.

Бул формулалардын колдонулушуна мисалдар карайлы.

1 - мисал. $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ экендиги белгилүү болсо, анда $\sin 2\alpha$ нын маанисин табалы.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ болгондуктан, адегенде $\cos\alpha$ нын маанисин таап алууга туура келет:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{1-\tfrac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Эми $\sin 2\alpha$ нын маанисин тапсак болот:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{5}.$$

2 - мисал. $\cos 120^\circ$ ту эсептегиле.

(2) формула боюнча

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

3 - мисал. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

Мында (1) формуласын удаалаш колдонууга туура келет. Бирок, (1) формуласы боюнча 2 деген сан коэффициенти катышат. Ошондуктан, аны колдонуш үчүн туюнтманы бир эле учурда 2ге көбөйтүп, кайра 2ге бөлүүгө туура келет. Төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(2\sin 4x\cos 4x) = \frac{1}{8}\sin 8x.$$

СУРООЛОР

1. Эки эселенген бурчтун формулалары кандай максаттарда колдонулушу мүмкүн?

2. Эки эселенген бурчтун формулаларын чыгарууда кайсыл формулалар, кандайча колдонулат?

КӨНҮГҮҮЛӨР

74. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos 2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\sin^2\beta + \cos 2\beta$;

в) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$;

г) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

75. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; в) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; г) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

76. Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$; б) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos 2x$;

в) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; г) $4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 4\alpha$.

77. Эсептегиле:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

б) $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$;

в) $\frac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$;

г) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

78. Жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$;

б) $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos 20^\circ}$;

в) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$;

г) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$.

79. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $4\sin\alpha\sin(90^\circ - \alpha)\sin(270^\circ - 2\alpha)$;

б) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;

г) $(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha})\cdot\sin 2\alpha$.

80. Эгер:

а) $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$ болсо, $\sin^2\alpha$ нын;

б) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ болсо, $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$ нын;

в) $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$ болсо, $\frac{27\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$ нын;

г) $\operatorname{tg}\alpha = 5$ болсо, $\operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha$ нын маанисин тапкыла.

81. Эсептегиле:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$;

б) $\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}} - \frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}$;

г) $\frac{(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin^4 70^\circ}$.

82. α нын кабыл алууга мүмкүн болгон бардык маанилеринде төмөнкү барабардыктардын аткарыларын далилдегиле:

а) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2\mathrm{tg}2\alpha$;

б) $\sin\alpha(1+\cos2\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha$;

в) $4\cos^2\alpha-1=1+2\cos2\alpha$;

г) $\frac{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\sin2\alpha$;

д) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\cos2\alpha$;

е) $\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}=(\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha})^2$.

83. Эгер:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$ болсо, анда $\sin2\alpha$ нын;

б) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=-1$ жана $\mathrm{tg}\alpha=3$ болсо, анда $\mathrm{tg}\beta$ нын;

в) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ болсо, анда $\sin(2\alpha+3\pi)$ нин;

г) $\mathrm{tg}x=2$ болсо, анда $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-2x)$ тин;

д) $x=\frac{\pi}{6}$ болсо, анда $\frac{1-\sin(2x+\frac{3\pi}{2})}{\sin(\pi-3x)-\sin(-x)}$ тин;

е) $x=\frac{\pi}{24}$ болсо, анда $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2 3\alpha}{\sqrt{3}\cos2\alpha}$ нын маанисин эсептегиле.

84. Эки эселенген бурчтун формулаларын колдонуп, төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

б) $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$;

в) $\frac{1+\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

г) $\frac{2ctg\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Көрсөтмө. в) $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$ деп алгыла.

85. Мурдагы маселедеги көрсөтмөнү пайдаланып, тендештиктерди далилдегиле:

а) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

б) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}$;

в) $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\alpha$;

г) $\frac{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

86. Төмөнкү барабардыкты канааттандырган x тин кандайдыр бир маанисин көрсөткүлө:

а) $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; б) $\cos x\sin x=\frac{1}{4}$.

V ГЛАВАГА КОШУМЧА КӨНҮГҮҮЛӨР

87. а) 5°; б) 200°; в) 320°; г) 700°; д) 2700° бурчунун радиандык ченин тапкыла.

88. Градустар жана минуталар аркылуу туюнткула:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{8}$; д) $\frac{\pi}{5}$.

89. Төмөнкүлөрдү тар бурчтун тригонометриялык функцияларына келтиргиле:

а) $\sin 160^\circ$; в) $\operatorname{tg}200^\circ$; д) $\sin\frac{5\pi}{4}$; ж) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$;

б) $\cos 210^\circ$; г) $\operatorname{ctg}240^\circ$; е) $\cos\frac{5\pi}{3}$; з) $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{5}$.

90. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos x\operatorname{tg}(180^\circ+x)\operatorname{tg}(270^\circ-x)$;

б) $\dfrac{\sin(\pi-x)\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\operatorname{ctg}(\pi-x)}$;

в) $\sin 170^\circ\cos 280^\circ-\sin 260^\circ\cos 10^\circ$;

г) $\dfrac{1+\sin 100^\circ\cos 170^\circ}{1+\sin 350^\circ\sin 180^\circ}$;

д) $\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)+\operatorname{ctg}(270^\circ-\beta)-\operatorname{tg}(180^\circ-\beta)+\operatorname{ctg}\beta$;

е) $\operatorname{ctg}(x-90^\circ)(\sin(x-270^\circ)-\sin(180^\circ-x))$.

91. Төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$; б) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

в) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

92. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=-\frac{7}{25}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ экендиги белгилүү болсо:

а) $\sin(\alpha+\beta)$ ны; в) $\cos(\alpha+\beta)$ ны; д) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ны

б) $\sin(\alpha-\beta)$ ны; г) $\cos(\alpha-\beta)$ ны; е) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ ны тапкыла.

93. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$, α жана β тар бурчтар экендиги белгилүү.

а) $\sin(2\alpha + 2\beta)$ ны; б) $\cos 2(\alpha - \beta)$ ны тапкыла.

94. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos(\alpha - \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$;

б) $\sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$;

в) $\cos\beta + \cos(120^\circ + \beta) + \cos(240^\circ + \beta) + \sin\beta$;

г) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$; д) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\alpha}$; е) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

95. Теңдештикти далилдегиле:

а) $\frac{2\sin x + \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x} = \mathrm{ctg}^2 x$;

б) $\cos y + \cos(120^\circ - y) + \cos(120^\circ + y) = 0$;

в) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + x) - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = 2\mathrm{tg}2x$;

г) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \mathrm{tg}(45^\circ - \alpha)$;

д) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

е) $\frac{1 + \sin 2\beta}{\cos\beta + \sin\beta} = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$.

96. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \pi)}$; б) $\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)}$.

97. Эгер:

а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болсо, анда $\frac{1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha}{1 + \sin\alpha}$ туюнтмасынын маанисин;

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болсо, анда $\frac{1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

98. Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos\alpha - 0{,}5} = 2$; б) $\frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2\alpha} = 2$.

VI глава

ЖАЛПЫ КУРСТУ КАЙТАЛОО ҮЧҮН КӨНҮГҮҮЛӨР

Бул главага негизинен бардык өтүлгөн материалдарга тиешелүү көнүгүүлөр киргизилди. Айта кетчү нерсе:

1. Көнүгүүлөрдүн оңою да бар, татаалы да бар. Көпчүлүк көнүгүүлөр жогорку окуу жайларына кирүү экзамендеринде кездешкен мисал, маселелерден түзүлдү.

2. Көнүгүүлөрдүн арасында математикалык олимпиадаларга сунуш этилген маселелер да бар. Мындай көнүгүүлөргө, негизинен, көрсөтмө берилди.

1. Эгерде $2x+y=2$, $x+3y=3$ болсо, анда x^2+y^2 туюнтмасынын маанисин тапкыла.

2. Эгерде $2x-5y=0$, $x+10y=2$ болсо, анда x^2-y туюнтмасынын маанисин тапкыла.

3. Берилген функциянын графиги абсцисса огун канча жолу кесип өтөт:

а) $y=x^2-0{,}1x+3$; б) $y=x^3+3x^2+5x$?

4. Теңдеменин тамырларынын квадраттарынын суммасын тапкыла:

а) $x(x-\sqrt{3})=1$; б) $x^4+3x^2-4=0$.

5. Теңдеменин бардык тамырларынын суммасын тапкыла:

$$(x^2-7x+2)^2-13(x^2-7x)-26=0.$$

Көрсөтмө. $x^2-7x=u$, десек квадраттык теңдемени алабыз.

6. Теңдемени чыгаргыла:

а) $|x-4|=x$; б) $|x+5|=6$.

Көрсөтмө. Мындай теңдемелерди эки жагын квадратка көтөрүп, квадраттык теңдемеге келтирип, чыгарса да болот. Бир гана эстеп койчу нерсе: табылган тамырлар, берилген теңдемени канааттандырабы? Ушуну текшерүү керек.

7. Берилген $x^2+bx-12=0$ теңдемесинин бир тамыры 3кө барабар болсо, анда b коэффициентин тапкыла.

8. Эгерде $x^2+px+q=0$ теңдемесинин тамырларынын айырмасы 5ке, ал эми тамырларынын кубдарынын айырмасы 35ке барабар болушса, анда p, q ларды тапкыла.

9. m дин кайсы эң чоң маанисинде

$$(m+3)x^2-20x+12m+13=0$$

квадраттык теңдемесинин эки тамыры барабар болушат?

10. Эгерде $x=6$ — тамыры экендиги, ал эми $M(4; -8)$ чекитинде эң кичине мааниге ээ болору белгилүү болсо, анда ax^2+bx+c үч мүчөсүнүн коэффициенттерин (a, b, c) тапкыла.

11. Эгерде $M(\frac{1}{2}; 25)$ чекитинде эң чоң мааниге ээ болору жана $x=0$ болгондо мааниси 24 экени белгилүү болсо, анда ax^2+bx+c үч мүчөсүнүн коэффициенттерин тапкыла.

12. Эгерде $y=ax^2+bx+c$ параболасынын чокусу $P(6; -12)$ чекитинде жатса жана параболанын тармактары жогору багытталары, параболанын x огу менен кесилиш чекитинин бири $A(8; 0)$ экени белгилүү болсо, анда a, b, c коэффициенттерин тапкыла.

13. Эгерде $y=ax^2+bx+c$ параболасынын чокусу $P(-2; 7)$ чекитинде жатса, бул парабола ординатасы 15 болгон чекитте y огун кесип өтсө, анда параболанын тармактары жогору багытталганын билип туруп, a, b, c коэффициенттерин тапкыла.

14. Үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $x^2-2ax+a^2-b^2$; б) $4x^2-20ax+9a^2$; в) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab$

15. Бөлчөктү кыскарткыла:

а) $\frac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$; б) $\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}$.

16. Теңдемени чыгарбай туруп, тамырларынын белгилерин аныктагыла:

а) $8x^2-1=2x$; в) $x^2+9x-22=0$; д) $3x^2+8x=4$;
б) $x^2-20x-300=0$; г) $2x^2+5x=-2$; е) $-x^2+x=-1$.

17. k нын кайсы маанисинде:

а) $x^2+kx-24=0$ теңдемесинин тамыры -3кө барабар?
б) $kx^2+12x-3=0$ теңдемесинин тамыры $\frac{1}{5}$ке барабар?
в) $x^2-2ax+k=0$ теңдемесинин тамыры $a-b$ га барабар?

18. k нын кайсы маанисинде $3x^2-5x+k=0$ теңдемесинин тамырлары $6x_1+x_2=0$ шартын канааттандырат?

19. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\frac{3x-7}{x+5}=\frac{x-3}{x+2}$; б) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$;

в) $\frac{7}{x}-\frac{21+65x}{7}+8x+11=0$; г) $3x+\frac{(x-3)^2}{4}=\frac{(x+3)^2}{8}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}$.

20. Төмөнкү теңдемелер тең күчтүүбү:

а) $x-7=3-x$ жана $(x-7)x=(3-x)x$;

б) $(x-4)(x+2)=5(x-4)$ жана $x+2=5$;

в) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{3-x}{x-1}$ жана $x+1=3-x$; г) $x^2+5x+8=2$ жана $x^2+5x+6=0$?

21. Эгерде a жана b сандары $x^2+ax+b=0$ теңдемесинин тамырлары болушса, анда бул сандарды тапкыла.

22. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; в) $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1$;

б) $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}$; г) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

Көрсөтмө. г) $x^2+2x+2=t$ деп белгилегиле.

23. Теңдемени чыгаргыла:

а) $(x-4)^4+x^4=82$; в) $x^4+4x-1=0$;

б) $(x-1)^4+(x+3)^4=626$; г) $x^4-3x^3-1=0$.

Көрсөтмө. а), б): $(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=c$ теңдемеси (мында α, β, c — берилген сандар) эгерде $y=\frac{(x+\alpha)+(x+\beta)}{2}=x+\frac{\alpha+\beta}{2}$ деп белгилесек, анда y ке карата биквадраттык теңдемеге келет; в): $(x^2+1)^2=2(x-1)^2$ теңдештигин пайдалангыла; $t=\frac{1}{x}$ деп г) ны в) га келтирүүгө болот.

24. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=24$; б) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=144$.

Көрсөтмө. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=c$ теңдемеси (мында α, β, γ, δ, c — берилген сандар) эгерде $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ жана $\beta-\alpha=\delta-\gamma$ шарттары аткарылса, анда $y=\frac{x-\alpha+x-\beta+x-\gamma+x-\delta}{4}$ деп белгилесек, анда y ке карата биквадраттык теңдемеге келтирилет.

25. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин узундугу a га барабар жана негизине параллель жүргүзүлгөн түз сызык үч бурчтукту аянттары барабар эки бөлүккө бөлөт. Үч бурчтуктун ичине камалган кесиндинин узундугун тапкыла.

26. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасында жаткан чекит гипотенузаны 15 жана 20 см кесиндилерге бөлсө жана анын катеттеринен бирдей аралыкта экени белгилүү болсо, анда үч бурчтуктун катеттеринин узундуктарын тапкыла.

27. Эгерде $ABCD$ параллелограммында AC жана BD диагоналдарынын бири экинчисинен 2 см ге чоң болсо жана ABD бурчунун биссектрисасы AD жагын AE=6,8 см, ED=10,2 см болгон кесиндилерге бөлсө, анда параллелограммдын диагоналдарынын узундуктарын тапкыла.

28. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи $4\sqrt{2}$ см ге, ал эми каптал жагынын медианасы 5 см ге барабар. Бул үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

29. Радиусу 10 см болгон айланага сырттан тең капталдуу трапеция сызылган. Бул трапециянын каптал жактарынын айланага тийишкен чекиттеринин аралыгы 12 см ге барабар. Трапециянын каптал жагынын узундугун тапкыла.

30. Тик бурчтук формасындагы бакчанын бир жагы экинчи жагынан 10 м ге чоң жана аны тосмо менен курчоо талап кылынсын. Эгерде бакчанын аянты 1200 м^2 болсо, анда тосмонун узундугун тапкыла.

31. Тик бурчтуктун бийиктиги анын негизинин 75% ин түзөт. Эгерде анын аянты 48 м^2 болсо, анда бул тик бурчтуктун периметрин тапкыла.

32. Узундугу кандайдыр бир квадраттын периметрине барабар болгон жиптин бир жагынан 36 см кесилип алынды. Эгерде кыскартылган жиптин узундугу башка бир квадраттын периметрине тең болсо жана бул квадраттын аянты биринчи квадраттын аянтынан $2\frac{1}{4}$ эсе кичине болсо, анда жиптин баштапкы узундугун тапкыла.

33. Кинотеатрдын көрүү залында 320 орун бар. Эгерде ар бир катарга 4төн орун кошулса жана дагы 1 катарды кошкондо орундун саны 420 болору белгилүү болсо, анда көрүү залындагы катарлардын саны канча болуп калат?

34. Эки автомобиль бир шаардан экинчи шаарга бир убакта чыгышат. Биринин ылдамдыгы экинчисиникинен 10 км/саатка чоң, ошон үчүн белгиленген жерге 1 саат эрте келет. Эгерде шаарлардын аралыгы 560 км болсо, анда автомобилдердин ылдамдыктарын аныктагыла.

35. Эки пристандын дарыя боюнча аралыгы 80 км ге барабар. Пароход бир пристандан экинчи пристанга 8 саат 20 минутада барып кайра келет. Эгерде суунун агымынын ылдамдыгы 4 км/саат болсо, анда пароходдун тынч турган суудагы ылдамдыгын тапкыла.

36. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $x^2+2x>6x-15$; б) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-3}{x-2}<2$; в) $3x^2-5x-2>0$.

37. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $(x^2+x+1)(\ x^2+x+2)<12$; в) $(x^2-3x+2)(x^2-x)<0$;

б) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)>17$; г) $\frac{(x^2-1)(4-x^2)}{x^2-9}<0$.

38. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\frac{(2x-3)^4(3x+1)^3(x^2+x)^2}{(x^2+x+1)(x^2-25)}>0$; б) $\frac{(x+3)^4(x+2)^2}{(x+5)^2}>0$.

39. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$; б) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leq 0$; в) $\frac{3}{x^2-x+1}\geq 1$.

40. Эгерде $x\in R$, $y\in R$ болсо, анда $x^2+2y^2+2xy-6y+11>0$ болорун, толук квадратты бөлүп алып, далилдегиле.

41. Оң a, b үчүн $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ болорун далилдегиле.

42. Буняковскийдин барабарсыздыгын далилдегиле:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 ,$$

мында a_i, $b_i\in R$ ($i=1, 2, \ldots, n$), жана барабардык $a_i=в_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$) болгондо гана орун аларын көрсөткүлө.

Көрсөтмө. $\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2\geq 0$ квадраттык барабарсыздыгынын дискриминантын карагыла, мында $\sum_{i=1}^{n}c_i=c_1+c_2+\ldots+c_n$.

43. Эгерде x, y — оң сандар болушса, анда $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ болорун далилдегиле.

44. Эгерде $a_i>0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) болсо, анда

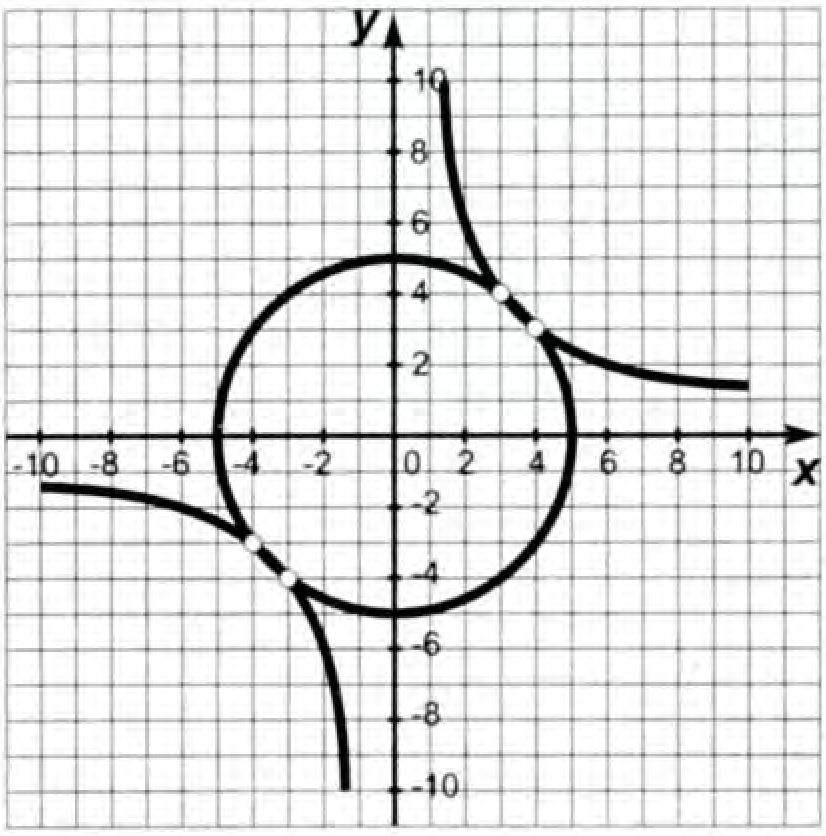
$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

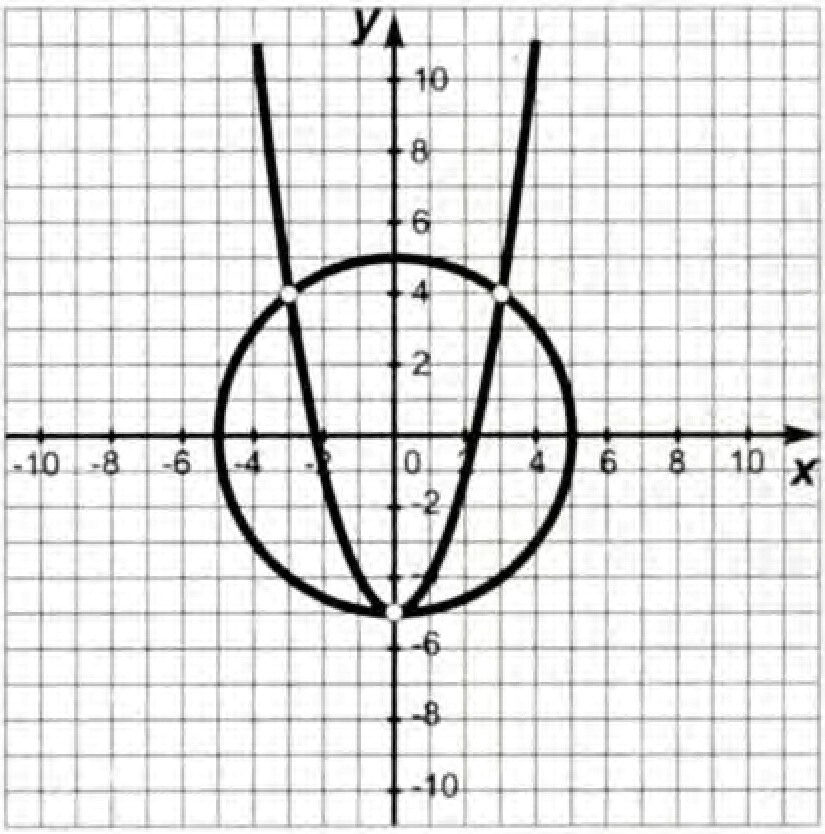
барабарсыздыгы орун аларын далилдегиле.

Көрсөтмө. Эгерде $a_1>0$, $a_2>0$ болсо, анда $\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}$ деген Евклиддин барабарсыздыгын колдонгула.

45. Теңдемелер системасын а) график методу, б) аналитикалык метод менен чыгаргыла жана жоопторун салыштыргыла:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ xy=12\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ x^2-y=5\end{cases}$





46. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y-3x=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-xy-y^2=19,\\ x-y=7.\end{cases}$

47. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}x^2+y^2-6y=0,\\ y+2x=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=63,\\ x-y=-3.\end{cases}$

48. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8},\\ x+y=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{4}{5},\\ x-y=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x-1)(y-1)=2,\\ x+y=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x-2)(y+1)=1,\\ x-y=3.\end{cases}$

49. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases}\frac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3,\\ x+y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2},\\ x-y=1.\end{cases}$

50. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x+2xy+y=10, \\ x-2xy+y=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13. \end{cases}$

51. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4. \end{cases}$

52. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=72, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3-y^3=133, \\ x-y=7. \end{cases}$

53. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}, \\ x+y=25. \end{cases}$

54. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

55. $\begin{cases} xy-2(x+y)=2, \\ xy+x+y=29 \end{cases}$ теңдемелер системасы үчүн $x_1x_2+y_1y_2$ ни тапкыла. Мында $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — бул системанын чыгарылыштары.

56. Эки белгисиздүү теңдемени чыгаргыла:

а) $(x-1)^2+|y-3|=0$; б) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

Көрсөтмө. Эгерде $u^2+v^2=0$, $u\in R$, $v\in R$ болсо, анда $u=0$, $v=0$ болорун пайдалангыла.

57. Эки белгисиздүү теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}=4$, мында $x\neq0$, $y\neq0$;

б) $x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+y^{51}+\frac{1}{y^{51}}=4$, мында $x\neq0$, $y>0$.

Көрсөтмө. а) 43-көнүгүүнү пайдалансак, анда $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, $\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}=2$ биквадраттык теңдемелерине келебиз; б) бул деле а) учурдагыдай чыгарылат.

58. Тик бурчтуктун периметри 28 см, ал эми жанаша жаткан жактарына тургузулган квадраттардын аянттарынын суммасы 116 см^2. Тик бурчтуктун жактарынын узундуктарын тапкыла.

59. Эгерде тик бурчтуктун аянты 120 см^2, диагоналы 17 см болсо, анда анын жактарынын узундуктарын тапкыла.

60. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 41 см, аянты 180 см^2. Катеттерин тапкыла.

61. а) Эки сандын арифметикалык орто саны 20га, ал эми геометриялык орто саны 12ге барабар. Бул сандарды тапкыла;

б) Эки сандын арифметикалык орто саны 17, геометриялык орто саны 15. Булар кайсыл сандар?

62. Эгерде эки орундуу санды анын цифраларынын суммасына бөлсөк, анда тийиндиси 6га жана калдыгы 2ге барабар, ал эми бул санды анын цифраларынын көбөйтүндүсүнө бөлсөк, анда тийиндиси 5ке жана калдыгы 2ге барабар болсо, бул кайсы сан?

63. Узундугу 2 км болгон тегерек жолчодо эки коньки тебүүчү бир багытта кыймылдашат жана ар бир 20 минутада диаметр боюнча бирдей абалга келишет. Эгерде бири экинчисине караганда толук айлананы 1 минутага тезирээк өтө турган болсо, анда ар бир коньки тебүүчүнүн ылдамдыктарын (саат менен) тапкыла.

64. Сочинениени 108 абитуриент жазышты. Аларга бардыгы болуп 480 барак кагаз таркатылган, бирок ар бир кызга бирден барак ашыкча берилген. Ошого карабастан кыздар менен балдардын барактарынын жалпы сандары барабар болуп калган. Экзамен берүүчүлөрдүн канчасы кыз, канчасы бала?

65. Туюнтманын аныкталуу областында

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

барабардыгы орун ала турган A, B, C лардын маанилерин тапкыла.

Көрсөтмө. Оң жагын орток бөлүмгө келтирип, жөнөкөйлөтүп, анан бөлүмдөрү барабар бөлчөктөрдүн алымдарын барабарлап, x тин бирдей даражадагы коэффициенттерин теңеп, A, B, Cларды табуу үчүн үч сызыктуу теңдемелер системасын алабыз.

66. Берилген n – мүчөсүнүн формуласы боюнча удаалаштыктын биринчи үч мүчөсүн жазгыла:

а) $a_n=n(n+1)(n+2)$; в) $a_n=7\cdot 8^n$;

б) $a_n=2^n+3^n$; г) $a_n=\sin\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}$.

67. Берилген n – мүчөсүнүн формуласы боюнча удаалаштыктын жетинчи, он төртүнчү жана отузунчу мүчөлөрүн эсептегиле:

а) $a_n = \frac{n-1}{n+1} + \cos(n\pi)$; в) $a_n = |n-15| - 5$;

б) $a_n = \frac{n+9}{2n-1} + n(n-7)(n-14)(n-30)$; г) $a_n = 100 - |2n-5|$.

68. Сан удаалаштыгы $a_{n+1} = 1 - 0,5a_n$ рекурренттик формуласы менен берилсе жана $a_1 = 2$ экени белгилүү болсо, анда анын жетинчи мүчөсүн тапкыла.

69. Удаалаштыктын n – мүчөсү: $a_n = -2(1-n)$ Бул удаалаштыктын арифметикалык прогрессия экенин далилдегиле.

70. Арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөлөрүнүн суммасын тапкыла:

а) $a_1 = -2$, $a_n = -60$, $n = 100$; б) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 101$.

71. Эсептегиле:

$$1+2+3+...+18+19+20+19+18+...+3+2+1.$$

72. Арифметикалык прогрессияда $a_3 = 11$, $a_5 = 19$ экени белгилүү болсо, анда анын алгачкы 10 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

73. Эгерде арифметикалык прогрессияда $S_n = 4n^2 - 3n$ экени белгилүү болсо, анда бул прогрессиянын биринчи үч мүчөсүн тапкыла.

74. Геометриялык прогрессиянын n – мүчөсүнүн формуласын жазгыла:

а) $-2, 4, -8, ...$; б) $-\frac{1}{2}, 1, -2, ...$.

75. Геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла:

а) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -3$, $n = 5$; в) $b_1 = 10$, $q = 1$, $n = 6$;

б) $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 10$; г) $b_1 = 3$, $q = -1$, $n = 9$.

76. Геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла:

а) 128, 64, 32, ..., $n = 6$; в) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, ...,$ $n = 5$;

б) 162, 54, 18, ..., $n = 5$; г) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...,$ $n = 4$.

77. Геометриялык прогрессияда $b_1 = 2$, $b_5 = \frac{1}{8}$ болсо, анда $S_n = \frac{63}{16}$ боло тургандай n дин маанисин тапкыла.

78. Төмөнкү үч сан арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болорун көрсөткүлө:

а) $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$; в) $\cos2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1;
б) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha-\beta)$; г) $\sin5\alpha$, $\sin3\alpha\cos2\alpha$, $\sin\alpha$.

79. Эгерде $5+7+9+...=512$ болсо, анда кошулуучулардын саны канчага барабар?

80. Геометриялык прогрессиянын бешинчи мүчөсүн тапкыла:

а) $b_2=\frac{1}{2}$, $b_7=16$; в) $b_2=4$, $b_4=1$;
б) $b_3=-3$, $b_6=-81$; г) $b_4=-\frac{1}{5}$, $b_6=-\frac{1}{125}$.

81. Эгерде 4, x, 9 геометриялык прогрессияны түзөрү белгилүү болсо, анда x эмнеге барабар?

82. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2+5+8+11+...+x=155$; б) $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$;
в) $(3+6+9+\ldots+3(n-1))+(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2})=137$.

83. Эсептегиле: $50^2-49^2+48^2-47^2+...+2^2-1$.
Көрсөтмө. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ формуласын пайдалануу керек.

84. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_1+a_5=\frac{5}{3}$, ал эми $a_3a_4=\frac{65}{72}$ болсо, анда S_{17} ни тапкыла.

85. Арифметикалык прогрессияда $a_1+a_5+6=0$, $a_2a_4=-3$ болсо, анда бул прогрессиянын алгачкы сегиз мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

86. 3 орундуу жуп оң сандардын суммасынын 1%и канча?

87. Эгерде арифметикалык прогрессияда: $a_1+a_3+a_5=-12$, $a_1a_2a_3=80$ болсо, анда бул прогрессияны тапкыла $(a_1,\ d=?)$.

Көрсөтмө. $a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, $(k<n)$ формуласын пайдалангыла.

88. Эгерде x, y, z арифметикалык прогрессиянын үч удаалаш мүчөсү жана $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$ экени белгилүү болсо, анда x, y, z эмнеге барабар? ***Көрсөтмө.*** 87-маселени карагыла.

89. Эгерде бири да нөл болбогон a_1, a_2, ..., a_n сандары арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү болушса, анда

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

теңдештигин далилдегиле.

Көрсөтмө. $\frac{1}{xy}=\frac{1}{y-x}(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$ барабардыгын пайдалангыла.

90. Эгерде он a, b, c сандары үчүн a^2, b^2, c^2 арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болушса, анда $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ сандары да арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болушарын көрсөткүлө.

Көрсөтмө. Эгерде a, b, c — арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болушса, анда $b-a=c-b$ болорун пайдалангыла.

91. Эгерде $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ сандары арифметикалык прогрессияны түзүшсө, анда төмөнкү барабардыктардын орун аларын далилдегиле:

а) $xy+yz+xz=3xz$; б) $\frac{y}{z}+\frac{y}{x}=2$.

92. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_1+a_4+a_7+...+a_{16}=147$ болсо, анда $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}$ суммасын тапкыла.

93. Эгерде арифметикалык прогрессияда $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$ болсо, анда S_{19} эмнеге барабар?

Көрсөтмө. a_1, a_2, ..., a_{m+n} удаалаштыгынын четтеринен баштап эсептегенде бирдей орунда жайланышкан мүчөлөрүнүн суммасын карагыла.

94. Эгерде арифметикалык прогрессияда натуралдык m, n сандары үчүн $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ барабардыгы орун алса, анда $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ болорун далилдегиле.

Көрсөтмө. Берилген шарттан a_1 менен d нын формулалык байланышын аныктагыла жана аны андан ары пайдалангыла.

95. Эгерде S_n, S_{2n}, S_{3n} — арифметикалык прогрессиянын алгачкы n, $2n$, $3n$ мүчөлөрүнүн суммасы болушса, анда $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$ барабардыгы орун аларын далилдегиле.

Көрсөтмө. a_1+3n, a_1+2n, a_1+n суммаларын S_{3n}, S_{2n}, S_n аркылуу туюнткула ($a_{3n}+a_n=2a_{2n}$ барабардыгын пайдалангыла).

96. Эгерде арифметикалык прогрессияда $S_n=n^2+2n$ болсо, анда a_n ди тапкыла.

Көрсөтмө. $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ формуласын пайдалангыла.

97. Эгерде a_1, a_2, a_3, ..., a_n — айырмасы d болгон арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү болушса, анда

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}$$

барабардыгы орун аларын далилдегиле.

98. Геометриялык прогрессияда $b_3+b_4=5$, $b_4+b_5=20$ экени белгилүү болсо, анда b_6 ны тапкыла.

99. Эгерде геометриялык прогрессияда $b_1+b_2+b_3=13$ жана $b_1b_2b_3=27$ болсо, анда b_1, b_2, b_3 тү тапкыла.

100. Эгерде геометриялык прогрессиянын биринчи үч мүчөсүнүн көбөйтүндүсү 64, кубдарынын суммасы 584 болсо, анда прогрессияны тапкыла.

101. Тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү (негизинин узуну, туурасы жана бийиктиги) геометриялык прогрессияны түзгөн сандар болушсун дейли. Эгерде көлөмү 216 м³ болсо, анда анын өлчөмдөрүн тапкыла.

Көрсөтмө. Параллелепипеддин көлөмү $V=xyz$, мында x, y, z — анын өлчөмдөрү.

102. Эгерде $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ болсо, анда $a_n<\frac{1023}{1024}$ барабарсыздыгы аткарыла турган n дин маанисин тапкыла.

103. Эгерде x_1, x_2, x_3, x_4 — геометриялык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болушса, анда

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2=(x_1-x_4)^2$$

барабардыгы орун аларын далилдегиле.

104. Барабардыкты далилдегиле: $(66...6)^2+88...8=44...4$, мында 66...6, 88...8 сандарынын ар биринде n ден цифра, ал эми 44...4 тө $2n$ цифра бар.

105. Сумманы тапкыла:

$$S_n=(x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})^2+\ldots+(x^n+\frac{1}{x^n})^2,\ \ x\neq\pm1.$$

Көрсөтмө. Кашааларды ачып, келип чыккан геометриялык прогрессиялардын суммасын тапкыла.

106. Теңдемени чыгаргыла:

а) $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6},\ |x|<1;$

б) $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2},\ \ x\neq0,\ \ |x|<1.$

107. Мезгилдүү бөлчөктү аралаш, дурус же буруш бөлчөккө айландыргыла:

а) 99, 58(3); б) 0,45 (45); в) 0,5 (4).

108. $\frac{a+x}{a-x}, \frac{a-x}{a+x}, (\frac{a-x}{a+x})^2, \ldots$ прогрессиясы x тин кандай маанилеринде чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болот?

109. Эгерде $x \neq 0$ болсо, анда $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$ функциясынын графигин чийгиле.

110. Радиусу r ге барабар болгон тегеректин ичине квадрат чийилген, ал эми квадраттын ичине тегерек чийилген. Ушинтип тегеректин ичине квадрат, квадраттын ичине тегерек, тегеректин ичине квадрат ... болуп чексиз кайталанып отурса, анда бардык тегеректердин аянттарынын суммасын жана бардык квадраттардын аянттарынын суммасын тапкыла.

111. Эсептегиле:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$;

б) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \dots$;

в) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \dots$;

г) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$.

112. Ар бир мүчөсү өзүнөн кийинки мүчөлөрдүн суммасына 2:3 катышында болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тапкыла.

113. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын биринчи үч мүчөсүнүн суммасы кийинки үч мүчөсүнүн суммасынан 1ге чоң жана бардык мүчөлөрүнүн суммасынан 6га кичине. Прогрессиянын бардык мүчөлөрүнүн суммасын тапкыла.

114. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнүн суммасы 56га, ал эми бул прогрессиянын мүчөлөрүнүн квадраттарынын суммасы 448ге барабар. Прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

115. Эгерде чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда (b_1, b_2, ...): $b_1 + b_2 + \dots = 3$, ал эми $b_1^3 + b_2^3 + \dots = \frac{108}{13}$ болсо, анда бул прогрессияны тапкыла.

116. Тамырлары геометриялык прогрессияны түзөрү белгилүү болсо, анда төмөнкү кубдук теңдемени чыгаргыла:

$$x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0.$$

Көрсөтмө. Тамырларын a, aq, aq^2 деп белгилейбиз.

117. Эгерде x, y, z сандары геометриялык прогрессияны түзүшсө жана $x + y + z = 93$ болсо, ошондой эле x, y, z арифметикалык прогрессиянын биринчи, экинчи жана жетинчи мүчөлөрү болушса, анда бул сандарды тапкыла.

Математикалык индукция методу менен далилдегиле ($n \in N$):

118. а) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Архимеддин маселеси);

б) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Эскертүү. $S_1=1+2+\ldots+n$, $S_2=1^2+2^2+\ldots+n^2$, $S_3=1^3+2^3+\ldots+n^3$ деп белгилеп, анан: а) $3x^2+3x+1=(x+1)^3-x^3$ теңдештигине $x=1$, 2, ..., n деп коюп, алынган туюнтмаларды мүчөлөп кошсок, анда $3S_2+3S_1+n=(n+1)^3-1$ ге келебиз. Мындан $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$ экенин эске алсак, анда Архимеддин маселесин чечкен болобуз; б) учурда $4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4-x^4$ теңдештигин пайдаланып, а) учурундагыдай эле S_1, S_2 ни эске алып, S_3 тү таба алабыз.

119. а) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

б) $1^3+3^3+5^3+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

120.

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$.

121.

а) $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)}=1-\frac{1}{7n+1}$;

б) $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}$.

122. а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$.

123. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$;

б) $|\sin nx|\le n\cdot|\sin x|$, мында $x\in R$;

в) $(1+x)^n>1+nx$, мында $n\ge 2$, $x>-1$, $x\ne 0$ (Бернуллинин барабарсыздыгы);

г) $(1+n)^n>1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$, мында $n\ge 3$, $x>0$.

Көрсөтмө. а) $\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta=\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ формуласын пайдалан.

124. Каалагандай $n \in N$ үчүн төмөнкү сумманы тапкыла:

$$S_4=1^4+2^4+3^4+...+n^4 \qquad \text{(Ферманын маселеси).}$$

Бул маселенин чыгарылышы 118-көнүгүүдөгү S_2, S_3 төрдү тапканга окшош:

$$x^5-(x-1)^5=5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$$

теңдештигин ($x=1, 2, ..., n$ болгондо) жана S_1, S_2, S_3 төрдүн маанилерин пайдалануу керек.

125. Эгерде $a_i>0$ ($i=1, 2, ..., n$), $n \in N$ болсо, анда

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n})\geq n^2 .$$

Эскертүү. Бул барабарсыздыкты далилдөөдө математикалык индукция методу жана Евклиддин $a_1>0$, $a_2>0$ үчүн төмөнкү барабарсыздыгы: $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$ колдонулат.

126. Эгерде $n \in N$, $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ болсо жана a_1, a_2, ..., a_n арифметикалык прогрессияны түзүшсө, анда $S_{2n}=S_n+\frac{1}{3}S_{3n}$ барабардыгы орун аларын далилдегиле.

127. Далилдегиле ($n \in \mathrm{N}$):

а) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;

в) $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx}=\mathrm{tg}\dfrac{n+1}{2}x$.

128. Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^{14}-8x^7+7=0$; б) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2.$

129.

а) $\sqrt{3x^2+5x+1}-\sqrt{3x^2+5x+8}=1$ теңдемесинин тамыры жок экенин далилдегиле;

б) $\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\frac{x}{y}=6,\\(x^2-y^2)\cdot y=x\end{cases}$

теңдемелер системасынын тамырлары (x; y): $(\sqrt[4]{8};\sqrt[4]{2})$, $(-\sqrt[4]{8};-\sqrt[4]{2})$, $(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$, $(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};-\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$, болорун далилдегиле.

130. Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; в) $y=\sqrt[78]{-4x^4+3x^2+1}$;

б) $y=\sqrt[9]{x^2-9x-17}$; г) $y=\sqrt[103]{6x^{92}-42x^{46}+89}$.

131. Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\sqrt{(x+4)(x-3)}<6-x$; г) $\sqrt[8]{x^2+3x+4}>-2$;

б) $\sqrt{(x+4)(x-3)}>6-x$; д) $\sqrt[6]{x^2+x+1}<-1$;

в) $x+4<\sqrt{x+46}$; е) $\sqrt{x-196}\le 0$.

132. $x^3+a^3+b^3-3abx=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-xa-xb-ab)$ ны пайдаланып, кубдук $x^3+px+q=0$ теңдемесинин бир тамыры Карданонун төмөнкү

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}$$

формуласы боюнча табыларын далилдегиле. Мында $Q=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\ge 0$.

133. а) $x^3+12x-8=0$ теңдемесинин бир тамыры

$$x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4},$$

б) $x^3-5x-12=0$ теңдемесинин бир тамыры

$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ экенин көрсөткүлө.

134. Теңдемени канааттандырган x тин бүтүн манисин тапкыла:

а) $\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot(\frac{1}{3})^3}=\frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}$; б) $\frac{x+5,5}{14}(4+\sqrt{2})=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{8^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{2}}}$.

135.

а) $(x+\frac{2}{3})\cdot\frac{9^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{\frac{3}{2}}\cdot(3-\sqrt{5})}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ теңдемесин канааттандырган бүтүн x үчүн $3x$ ти,

б) $16x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{\frac{5}{3}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}:\sqrt[6]{64}$ теңдемесин канааттандырган рационалдык сан x ти тапкыла.

136. Теңдемени канааттандырган x, y ти тапкыла:

а) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[5]{y}+\frac{1}{\sqrt[5]{y}}=4$, мында $x>0$, $y>0$;

б) $|x|+\frac{1}{|x|}+\frac{|y|}{2}+\frac{2}{|y|}=4$, мында $x\ne 0$, $y\ne 0$;

в) $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5$, мында $x>0$, $y>0$.

137. График методун, интервалды экиге бөлүү методун колдонуп, микрокалькуляторду пайдаланып, теңдеменин тамырын ε го чейинки тактык менен болжолдуу тапкыла:

а) $x^5=x+5,\ \varepsilon=0{,}01;$ в) $x^3=x^2+1,\ \varepsilon=0{,}001;$

б) $x^7=x+1,\ \varepsilon=0{,}01;$ г) $x^3+1=x^2,\ \varepsilon=0{,}001.$

138. Барабардыктын тууралыгын текшергиле:

а) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3;$ в) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2;$

б) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1;$ г) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

139. Барабардыкты далилдегиле:

а) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4;$ б) $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}\,.$

140. Эгер:

а) $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-{}^{-}\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ болсо, анда $x^3+3x-14=?$

б) $x=1{,}2$ жана $y=4$ болсо, анда $(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}})\cdot(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})=?$

в) $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ болсо, анда $\frac{z^3}{3}-z=?$

141. Эсептегиле:

а) $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})};$ б) $\left(\sqrt{(\sqrt{5}-\frac{5}{2})^2}-\sqrt[3]{(\frac{3}{2}-\sqrt{5})^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}.$

в) $(4^{-0{,}25}-2^{0{,}5})\cdot(4^{-0{,}25}+(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}).$

142. Эсептегиле:

а) $4^{\frac{1}{2}}\cdot16^{\frac{3}{4}}\cdot16^{-\frac{3}{4}}\cdot32^{-\frac{4}{5}}\cdot2^3;$ б) $27^{\frac{1}{3}}\cdot81^{\frac{3}{4}}\cdot(\frac{27}{8})^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}.$

143. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{192}}+7\cdot\sqrt[3]{18\cdot\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\cdot\sqrt[3]{24}+6\cdot\sqrt[3]{375}}};$ б) $\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}\,.$

144. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\cdot\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:(1-2\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}});$ б) $\dfrac{1+a\cdot\sqrt[3]{a}+a+\sqrt[3]{a^2}}{1-\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}},\ a\neq1.$

145. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt{\dfrac{(1+a)\cdot\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}};$ б) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}x+ax^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}.$

в) $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-\sqrt{mn}$, $m\neq n$;

146. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(\sqrt{n}+\sqrt[4]{mn})\cdot(\frac{1}{\sqrt{m^{-1}}}+\frac{\sqrt[4]{m^3n}-m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}})$, $m\neq n$;

б) $(\sqrt[4]{a^2-2a+1}+\frac{a}{\sqrt{1-a}}):(\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{\sqrt{a+1}}{a-1})$, $a\neq 1$.

147. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sqrt[6]{a\cdot\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; в) $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $x>0$; г) $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $x<0$.

148. Төмөнкү туюнтмаларды салыштыргыла (* нын ордуна >, <, = белгилеринин бирин койгула):

а) $(\frac{\sqrt{5}}{3})^{-\frac{1}{3}} * (\frac{\sqrt{5}}{3})^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{0{,}001} * \left(\sqrt{5}+2\right)^{0{,}001}$;

б) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}38} * (2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$; г) $(0{,}8(3))^{\sqrt{3}} * \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{2}}$.

149. Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдардан бошоткула:

а) $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$; б) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$, $a\neq 1$.

150. Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдардан бошоткула:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$; б) $\frac{1}{(5-\sqrt{3})^5}$; в) $\frac{15}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; д) $\frac{a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; е) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$.

Көрсөтмө. а) Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтма бөлүмү $q=\sqrt[4]{2}$ болгон геометриялык прогрессиянын 4 мүчөсүнүн суммасына барабар.

151. Теңдемени жана барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $2^{1+2+3+...+x}=2^{55}$; в) $2^{\frac{x-1}{x+2}}<1$;

б) $3^{x^2-4x+2}=\frac{1}{3}$; г) $2^{\frac{x-1}{x+2}}>1$.

Көрсөтмө. в), г) учурунда $y=2^x$ өсүүчү функция:
в) $2^u<2^v\Rightarrow u<v$; г) $2^u>2^v\Rightarrow u>v$

152. Теңдеменин бир тамыры $x=\frac{\pi}{2}$ экенин далилдегиле.

$$2\cdot\sqrt[3]{3-2\sin x}-\sqrt[4]{\cos x+tg\frac{x}{2}}+\sqrt[5]{\frac{2\sin x-5}{\cos x+3}}=0.$$

153. Теңдемени чыгаргыла:

а) $\frac{2}{9}x=(\sin15^\circ+\mathrm{tg}30^\circ\cos15^\circ)^2$;

б) $x^2+3x-3=\sin40^\circ\mathrm{ctg}20^\circ-\cos40^\circ$.

154. Эсептегиле (таблицасыз, микрокалькуляторсуз):

а) $3\sin15^\circ\cos15^\circ+\frac{\sin60^\circ}{\sin^4 15^\circ-\cos^4 15^\circ}$;

б) $\cos24^\circ\cos31^\circ-\sin24^\circ\sin31^\circ-\cos55^\circ$;

в) $\cos107^\circ\cos17^\circ+\sin107^\circ\sin17^\circ$;

г) $\sin51^\circ\cos21^\circ - \cos51^\circ\sin21^\circ$.

155. Эсептегиле (таблицасыз, микрокалькуляторсуз):

а) $\sin75^\circ \sin15^\circ$;

б) $\frac{\cos36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$;

в) $\frac{1}{\cos290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin250^\circ}$;

г) $14\sqrt{2}(\sin^4\frac{3\pi}{8}-\cos^4\frac{3\pi}{8})$.

156. Эсептегиле (таблицасыз, микрокалькуляторсуз):

а) $\mathrm{tg}^2 36^\circ\cdot\mathrm{tg}^2 72^\circ$;

б) $\mathrm{ctg}9^\circ+\mathrm{ctg}15^\circ+\mathrm{tg}9^\circ+\mathrm{tg}15^\circ-\mathrm{ctg}27^\circ-\mathrm{tg}27^\circ$;

в) $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$.

Көрсөтмө. б) $\mathrm{ctg}a\,\mathrm{tg}a=1$, $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $2\sin a\cos a=\sin2a$ жана келтирүүнүн формулаларын пайдаланса болот.

157. Эсептегиле (таблицасыз, микрокалькуляторсуз):

а) $\mathrm{tg}^2 15^\circ+4\mathrm{tg}60^\circ$; б) $\cos20^\circ-\sin20^\circ\cdot\mathrm{ctg}10^\circ$;

158. Эгер:

а) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=2$ болсо, анда $(\sin\alpha)^{-1}+(\mathrm{tg}\alpha)^{-1}=?$;

б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=3$ болсо, анда $\mathrm{tg}\alpha=?$;

в) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ болсо, анда $f(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})=?$;

г) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ болсо, анда $(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\beta)=?$;

д) $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ болсо, анда $(1+\mathrm{ctg}\alpha)(1+\mathrm{ctg}\beta)=?$

159. Эгер:

а) $\sin\alpha-\cos\alpha=b$ болсо, анда $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=?$;

б) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=c$ болсо, анда $\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{ctg}^4\alpha=?$;

в) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-m}{1+m}$ болсо, анда $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=?$;

г) $\mathrm{tg}\varphi+\mathrm{ctg}\varphi=a$ болсо, анда $\sin\varphi=?$

160. Эгер:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ болсо, анда $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=?$;

б) $\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7$ болсо, анда $\sin^2 2\alpha=?$;

в) $0<x<\frac{\pi}{2}$ жана $\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{4})-2\mathrm{tg}x=2$ болсо, анда $\sin^2 x=?$.

161. Эгер:

а) $\mathrm{ctg}x=\frac{13}{4}$ болсо, анда $\frac{2\cos x+\sin x}{\cos x-2\sin x}=?$;

б) $\cos 2\alpha=a$ болсо, анда $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=?$;

в) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$ болсо, анда $\mathrm{ctg}\beta=?$;

г) $\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x=a$, $\mathrm{tg}^4x+\mathrm{ctg}^4x=b$ болсо, анда b ны a аркылуу туюнткула.

162. Эгер:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ болсо, анда $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=?$;

б) $\cos 2\alpha=b$ болсо, анда $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=?$;

в) $f(x)=\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x-2$ болсо, анда:

1) $f(\frac{\pi}{2})$; 2) $1+f(\frac{\pi}{4})$; 3) $f(\frac{\pi}{6})$ эмнеге барабар?

163. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha})\cdot\sin 2\alpha$;

б) $\frac{ctg(\alpha-\frac{\pi}{2})\cdot\left[\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})-\sin(\pi-\alpha)\right]}{tg(\pi+\alpha)\cdot\left[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)\right]}$.

164. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\mathrm{tg}2\alpha)\cdot(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\mathrm{tg}2\alpha)$;

б) $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha)$;

в) $\sin^2(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})$.

165. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sqrt{2\sin\alpha\cos\alpha+1}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-\frac{2}{\sec\alpha-\mathrm{cosec}\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\mathrm{cosec}^2(\alpha+90^\circ)-1}-\frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\sec^2(\alpha-90^\circ)}$;

в) $\frac{\mathrm{tg}^2 2\alpha}{\mathrm{tg}4\alpha-\mathrm{tg}2\alpha}$;

г) $\frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}$.

Эскертүү. а), б) да $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$.

166. Берилген $f(x)$ функциясы x тин бардык маанилеринде турактуу санга барабар экенин далилдегиле жана бул санды тапкыла:

а) $f(x)=\sqrt{4\cos^4 x-6\cos 2x+3}+\sqrt{4\sin^4 x+6\cos 2x+3}$;

б) $f(x)=\sin^2 2x+0,5\cos 4x+2\sin^2 x+\cos 2x$.

167. Эгер $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $A=\sqrt{a^2+b^2}$ болсо, анда $a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi)$ теңдештигин далилдегиле.

168. Эгер α, β, γ сандары арифметикалык прогрессияны түзүшсө, анда

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\beta$$

барабардыгы орун аларын далилдегиле.

169. Эгер α жана β тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтары болушса, анда $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=4\sin\alpha\sin\beta$ болорун далилдегиле.

170. Теңдештикти далилдегиле:

а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{tg(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha}-2tg^2\alpha=0$; б) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;

в) $3+4\cos 2\alpha+cos4\alpha-8\sin^4\alpha=8\cos 2\alpha$; г) $\mathrm{tg}3\alpha=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$.

Көрсөтмө. б) $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$ теңдештигин квадратка көтөргүлө.

171. Теңдештикти далилдегиле:

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$; б) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=ctg\alpha$;

в) $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha$;

г) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

172. Теңдештикти далилдегиле:

а) $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 4x$;

б) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\frac{1}{4}\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)$;

в) $\frac{1-2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{ctg}\varphi$; г) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\mathrm{tg}^2\alpha$.

173.

а) a нын кайсы маанисинде $S=3\sin^2 x\cos^2 x+a\cdot(\sin^6 x+\cos^6 x)$ туюнтмасы x тен көз каранды болбойт?

б) $a\cdot(\sin^6 x+\cos^6 x)+b\cdot(\sin^4 x+\cos^4 x)+6\sin^2 x\cos^2 x$ туюнтмасы x тен көз каранды болбой турган a жана b нын байланышын тапкыла.

174. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы c жана тар бурчтарынын синустарынын суммасы: $\sin\alpha+\sin\beta=q>1$. Бул үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

175.

а) $\mathrm{tg}^2 20^\circ$, $\mathrm{tg}^2 40^\circ$, $\mathrm{tg}^2 80^\circ$ сандары $x^3-33x^2+27x-3=0$ теңдемесинин тамырлары болорун;

б) x тин бардык маанилеринде $\frac{1}{4}\leq\sin^6 x+\cos^6 x\leq 1$ барабарсыздыгы орун аларын далилдегиле.

176.

а) $y=\sin x+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{5}$ функциясынын мезгилин аныктагыла;

б) $y=\cos\sqrt{x}$ мезгилдүү эмес функция экенин далилдегиле;

в) $\mathrm{tg}1$ менен $\mathrm{tg}50^\circ$ сандарын салыштыргыла.

177. Эгерде $\cos\alpha=a$ болсо, анда $\cos\frac{\alpha}{3}$ тү табуу үчүн теңдеме түзгүлө.

ӨЗҮҢӨРДҮ СЫНАП КӨРГҮЛӨ:

178. Төмөнкү айырманын белгисин аныктагыла:

$$7{,}3^{-0{,}7}-0{,}15^{-5}.$$

179. Теңдемени чыгаргыла:

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$$

жана бул теңдеменин тамырларынын кубдарынын суммасын тапкыла.

180. Теңдемени чыгаргыла:

$$|2x-x^2+3|=2$$

жана анын тамырларынын көбөйтүндүсүн тапкыла.

181. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$ барабарсыздыгын канааттандырган x тин бүтүн маанилеринин санын тапкыла.

182. $\frac{8-x}{x-2}>0$ барабарсыздыгын канааттандырган x тин эң чоң бүтүн маанисин тапкыла.

183. Теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$$

жана анын тамырларынын суммасын тапкыла.

ТАРЫХЫЙ МААЛЫМАТТАР

Математика илими өзүнүн өнүгүү жолунда нелерди гана көрбөдү! Буга тарых күбө. А биз болсо, силерге кыскараак эле маалымат берели. Аңгемебиздин мазмунун болжол менен төмөнкүчө аныктасак:

I. Математиканын өнүгүү жолу жөнүндө.

II. Математикалык символдор жөнүндө.

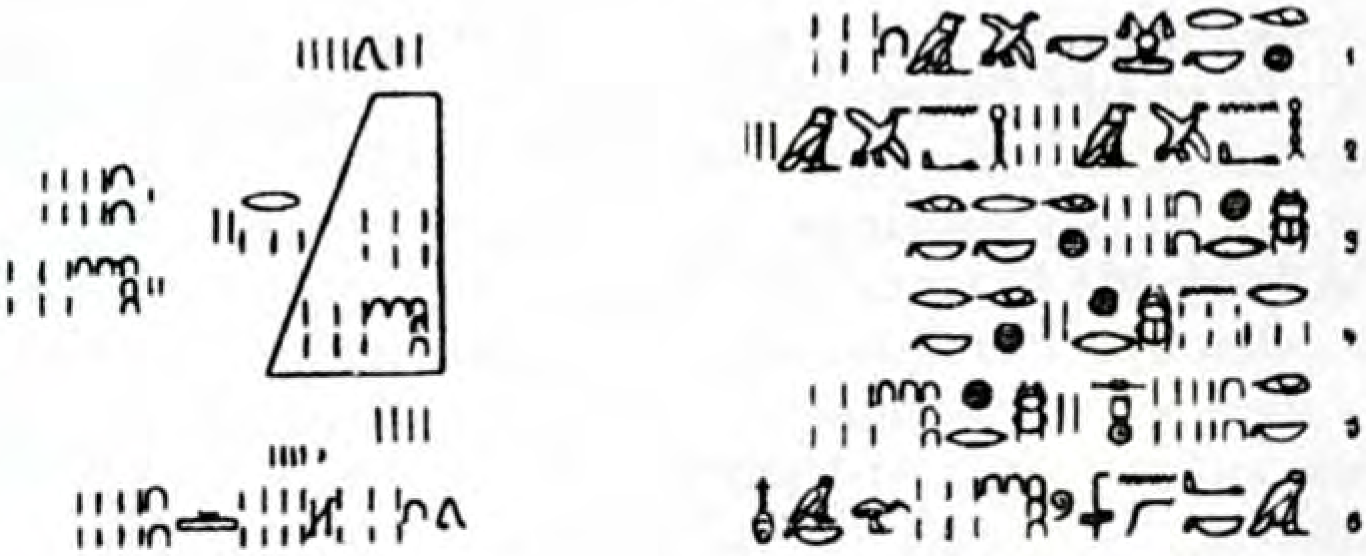
I. Математиканын өнүгүү жолу жөнүндө

Математика татаал өнүгүү жолун басып өттү. Чынында эле математика азыркы (биздин) учурдагы сонун, сонун теорияларга жөн эле келип калган жок. Бул теориялар өтө узак, дүйнөдөгү математиктердин көптөгөн муундарынын чыгармачыл эмгектеринин натыйжасынан калыптанган. Буга кыскача токтололу. «Оболу сөз болгон» («Сначала было слово») деген кеп бар эмеспи. Ошонун сыңары, узак кылымдар бою математикалык мисал, маселе, теориялар сөз менен эле жазылып келген. Мисалдарга кайрылалы: 1) Кыргыз элинде кеп бар: «Эки он беш отуз» деген. Бул 2×15=30 же 15+15=30 ду билдирет эмеспи. Элибиз байыркы элдерден экенин эске алсак, анда бул математикалык сүйлөм өтө эски болуу керек. Бул сүйлөм оозеки эле айтылып келген. Балким, бул сүйлөм адамзат тарыхындагы эң алгачкы математикалык мисалдыр. Ал эми бул сүйлөмдүн «баары бир эмеспи» деген мааниси элибиздин күндөлүк жашоосунда айтылып, кызмат кылып жүрөт. Демек, биз келтирген математикалык сүйлөм турмуш, жашоо талабынан келип чыккан десек болчудай. 2) Эми папирустар — байыркы Египеттин математикалык эстеликтери жөнүндө сөз кылсак. Англиялык египтолог (Египетти изилдөөчү) Райнддын ысмын алып жүргөн Райнд папирусу — бул тростниктин кабыгына жазылган математикалык эстелик. Райнд папирусу биздин эрага чейинки 2000-жылга таандык деп болжолдонуп жүрөт жана анда 85 маселе бар экен, мунун ичинде 79-маселе геометриялык прогрессиянын суммасын табуу жөнүндө. Ошондой эле дагы бир папирус — Московский деген ат менен белгилүү жана анын ичинде 25 маселе бар. Бул эки папируста тең маселелер конкреттүү мааниге ээ, теория жөнүндө сөз жок. Папирустун кандайча жазылыш, окулушун элестетүү үчүн төмөнкү сүрөттү келтирели. Бул сүрөттө:

а) папирустун демотикалык кат менен жазылган фрагменти (үзүндүсү) (түп нускадан);

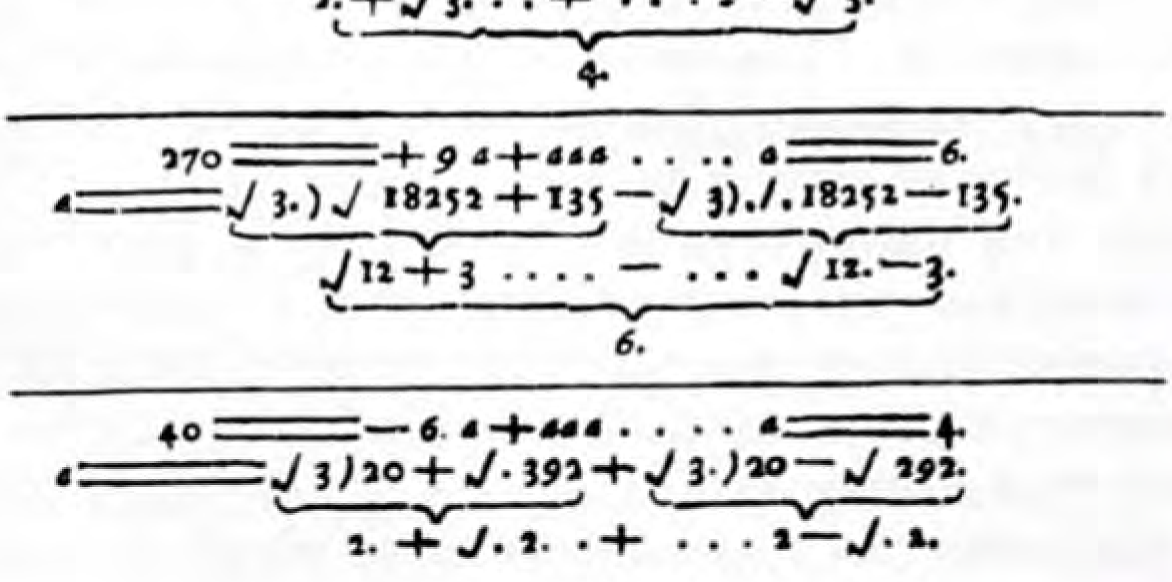
б) бул фрагменттин иероглификалык жазууга которулушу.

а)



б)

Бул сүрөттү карап туруп, математика жөнүндө сөз болуп жатканын андоого болор, бирок түшүнүү мүмкүн эмес. Биз дүйнөдөгү эң белгилүү математикалык эстеликтер (байыркы эмгектер) — 2 папирус жөнүндө сөз кылдык. 3) Бул мисал: Т. Гарриоттун (Лондон, 1631-ж., 101-бет) «Аналитикалык искусствону алгебралык тендемелерди чыгарууга колдонуу» деген китебинен алынган төмөнкү сүрөт:



$$52 = -3.a+aaa \;.\;.\;.\;.\; a =$$

$$a = \underbrace{\underbrace{\sqrt{}\,3.)\,26+\sqrt{}\,675}_{2.+\sqrt{}\,3.}\;.\;.\;.+\;.\;.\;.\;\underbrace{\sqrt{}\,3.)\,26-\sqrt{}\,675.}_{2-\sqrt{}\,3.}}_{4.}$$

$$270 = +9a+aaa \;.\;.\;.\;.\; a = 6.$$

$$a = \underbrace{\underbrace{\sqrt{}\,3.)\sqrt{}\,18252+135}_{\sqrt{}\,12+3}\;.\;.\;.\;.-\;.\;.\;.\;\underbrace{\sqrt{}\,3).\sqrt{}.\,18252-135.}_{\sqrt{}\,12.-3.}}_{6.}$$

$$40 = -6.a+aaa \;.\;.\;.\;.\; a = 4.$$

$$a = \underbrace{\sqrt{}\,3)\,20+\sqrt{}.\,392}_{2.+\sqrt{}.\,2.}\;.+\;.\;.\;.\;\underbrace{\sqrt{}\,3.)\,20-\sqrt{}\,292.}_{2-\sqrt{}.\,2.}$$

Бул сүрөттө коэффициенттери турактуу сан болгон куб теңдемелеринин жазылышы жана алардын тамырларынын туюнтмасы келтирилген.

Биз сөз кылган үч мисалда тең азыркы учурдагыдай жазуулар жок. Жогорку мисалдар менен азыркы математикалык маселе, мисалдарды салыштырсак, анда математикалык символдор кантип калыптанган деген суроо туулат.

II. Математикалык символдор жөнүндө

Булардын баары жөнүндө сөз кылсак, өзүнчө китеп болчудай. Биз алардын алгебрага тиешелүү айрымдарына токтололу жана качан, ким тарабынан сунушталган деген суроого жооп иретинде келтирели.

1) ± (кошуу, кемитүү) белгилери 1489-жылы чех математиги И. Видман (XV кылым) тарабынан кийирилген.

2) × (крест түрүндөгү көбөйтүү) белгиси англис математиги В. Оутред тарабынан 1631-жылы кийирилген.

3) $\cdot$ (чекит түрүндөгү көбөйтүү) белгиси немис математиги Г.В. Лейбниц тарабынан 1698-жылы сунушталган.

4) : (бөлүү) белгиси 1684-жылы Г.В. Лейбниц тарабынан сунушталган.

5) = (барабардык) белгиси француз математиги Р. Рекорд тарабынан 1557-жылы сунушталган.

6) $>$, $<$ (чоң, кичине) барабарсыздык белгилерин 1631-жылы Т. Гарриот сунуштаган.

7) $||$ (параллелдик) белгисин англис математиги В. Оутред 1677-жылы кийирген.

8) ∞ (чексиз) белгисин 1655-жылы англис математиги Дж. Валлис сунуштаган.

9) $\sqrt[n]{\ }$ (радикал) белгисин 1525-жылы француз математиги К. Рудольф, андан кийин 1629-жылы француз математиги, лотарингиялык А. Жирар сунуш кылышкан.

10) a^n (даража) белгисин 1637-жылы француз математиги Р. Декарт, кийин 1676-жылы англис математиги И. Ньютон сунуш кылышкан.

11) $|x|$ (модуль) белгисин 1841-жылы немис математиги К. Вейерштрасс кийирген.

12) ! (факториал) белгисин Х.Р. Крамп 1806-жылы кийирген.

13) π саны аркылуу айлананын узундугунун анын диаметрине болгон катышын белгилөө 1706-жылы англис математиги У. Джонсон тарабынан сунуш этилген.

14) x, y, z менен өзгөрмө чоңдуктарды белгилөө 1637-жылы француз математиги Р. Декарт тарабынан сунушталган.

15) Функцияны $y=f(x)$ деп белгилөөнү 1734-жылы Л. Эйлер киирген.

16) sin, cos (синус, косинус) символдорун 1748-жылы Л. Эйлер киирген.

17) tg (тангенс) символун 1753-жылы Л. Эйлер киирген.

18) sec (секанс) терминин 1583-жылы дания математиги Т. Финк (1561—1656) киирген.

19) ctg (котангенс), cosec (косеканс) терминдерин 1620-жылы англис астроному Э. Гунтер (1581—1626) киирген.

20) $\perp$ (перпендикуляр) белгисин 1634-жылы француз математиги П. Эригон киирген.

21) Терс сандар биздин эрага чейинки 2-кылымда кытай математиктери тарабынан колдонула баштаган. Ал эми Европада терс сандар Декарттын координаттар системасынан кийин кеңири колдонула баштаган.

22) Бөлчөк даражалар француз математиги Н. Орезм тарабынан XIV кылымдын экинчи жарымында киирилген.

23) Нөл жана терс даражалар жазмада француз математиги Н. Шюке тарабынан 1484-жылдан тартып колдонула баштаган.

24) Натуралдык көрсөткүчтүү даражанын $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ касиетине теңдеш сүйлөм Евклиддин «Башталыштарында» кездешет.

25) «Сызыктуу теңдемелер системасынын аныктагычы» символу япон математиги Кова Секи (1642—1708) тарабынан 1683-жылы, Г.В. Лейбниц тарабынан 28.04.1693-жылы сунуш этилген. Бирок, алар унутулуп, кийин швейцар математиги Габриэль Крамер тарабынан 1750-жылы кайра сунушталган. Аныктагычты «детерминант» деп белгилөөнү 1815-жылы О. Коши сунуштаган.

26) Квадраттык теңдемени тамгалар менен белгилеп чыгарууну француз математиги Ф. Виет систематикалык түрдө колдоно баштаган.

27) Сандарды тамга менен белгилөө славян алфавитин түзүүчүлөрдүн бири Кирилл тарабынан киирилген деп эсептешет.

28) Ондук бөлчөктүн бүтүн жана бөлчөк бөлүктөрүн «,» («үтүр») менен ажыратууну 1616-жылы немис математиги, астроному И. Кеплер (1571—1630) киирген.

29) Көп кошулуучулардын суммасын Σ (гректин «сигма» тамгасынан) символу менен кыскартып белгилөөнү 1755-жылы Л. Эйлер киирген.

30) «Аксиома», «теорема» терминдерин байыркы грек философу Аристотель (б.з.ч. 384—322-ж.) киирген.

31) «Абсцисса», «ордината» терминдери Г.В. Лейбниц тарабынан 1684-жылы киирилген.

ЖООПТОР

I глава

3. а), б) x — каалагандай сан; в) $x\neq2$; г) $x\neq\pm2$; д) $x\neq1$, $x\neq2$; е) $x\geq7$. **4.** а) $x=5$; б) $x=1$ жана $x=9$; в) болбойт; г) $x=0$. **5.** а) $f(-4)=-3$, $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(5)=2$; г) $[-4; 3]$. **10.** а) $x=4$; б) $x=-2$; в) $x=-0,5$; г) жок. **11.** а) нөлү $x=-\frac{5}{4}$, $(-\infty; +\infty)$ аралыгында өсөт; б) нөлү $x=1,5$, $(-\infty; +\infty)$ аралыгында кемийт; в) нөлү жок, $(-\infty, 0]$ аралыгында кемийт, $[0; +\infty)$ аралыгында өсөт; г) нөлдөрү $x=\pm2$, $(-\infty, 0]$ аралыгында өсөт, $[0; +\infty)$ аралыгында кемийт д) нөлү $x=2$, $(-\infty, 2]$ аралыгында кемийт, $[2; +\infty)$ аралыгында өсөт; е) нөлү $x=-3$, $(-\infty, -3)$ аралыгында кемийт, $[-3; +\infty)$ аралыгында өсөт. **15.** $y=6x-7$, $y=x+2$ — өсүүчү функциялар, $y=-5x+10$, $y=-9x-12$, $y=2-x$ — функциялары кемүүчү. **17.** а) $x=4$, б) $x=9$. **19.** а) $(-\infty; +\infty)$ аралыгында өсөт; б) $(-\infty; +\infty)$ аралыгында кемийт. **20.** а) жуп; б) так; в) жуп; г) жуп эмес жана так эмес; д) жуп; е) так; ж) жуп; з) так; и) жуп эмес жана так эмес. **23.** а) жуп; б) так; в) жуп; г) жуп эмес жана так эмес. **24.** а) $(-\infty; +\infty)$ аралыгында өсүүчү, $x>0$ болсо оң мааниге ээ; б) $(-\infty; +\infty)$ аралыгында өсүүчү, $x>0$ болсо оң мааниге ээ. **26.** а) $x=-1$ жана $x=2$; б) $x=0$ жана $x=1$; в) $x=\frac{1}{2}$; г) жок. **27.** а) -3; 2; б) -20; 5; в) -1; $\frac{1}{2}$; г) тамырлары жок; д) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; е) $-\frac{1}{4}$; ж) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; з) 0; 5; **29.** а) 0; 1; б) $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; в) нөлдөрү жок; г) $-\frac{1}{5}$; 1; д) нөлдөрү жок; е) $\frac{2-2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$; ж) $-\frac{1}{2}$; з) -2; $\frac{1}{3}$. **30.** -2; 2. **31.** а) $p=-5$, $q=6$; б) $p=3$, $q=-4$; в) $p=3$, $q=2$; г) $p=-2$, $q=-15$. **33.** $x=1$ болгондо, эн кичине мааниси 4кө барабар. **35.** а) $2(x+1)(x-\frac{7}{2})=(x+1)(2x-7)$; б) $-5(y+1)(y-\frac{3}{5})=(y+1)(3-5y)$; в) $(x+9)(x-1)$; г) $(\frac{1}{6})(x+2)(x+1)$; д) $-5(x-1)(x+3)=(5-5x)(x+3)$; е) $(y-1)(y-15)$; ж) $-(x-6-2\sqrt{3})(x-6+2\sqrt{3})=(6+2\sqrt{3}-x)(x-6+2\sqrt{3})$; з) $-2(x-1)(x-(\frac{3}{2}))=(x-1)(3-2x)$; и) $2(x-(\frac{1}{2}))^2=(2x-1)(x-(\frac{1}{2}))$; к) $-16(a+\frac{3}{4})^2=(4a+3)(-3-4a)$; л) $(m-2)(m-3)$; м) $0,25(m-4)^2$. **39.** а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{4}{3x-1}$; в) $\frac{b+4}{b+3}$; г) $-\frac{p-1}{p+2}$; д) $\frac{x-3}{x+8}$; е) $\frac{y+5}{2y+1}$. **43.** $\frac{3}{4}$. **51.** $k=-4$, $m=-6$. **52.** $p=4$, $q=-3$. **53.** $y=2x^2-3x+5$. **58.** а) $(1; 2)$; б) $(-8;6)$; в) $(-\infty;-2]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$; г) $(-\infty;1,5)\cup(2;+\infty)$; д) $(-\infty;-1)\cup(\frac{1}{3};+\infty)$; е) $(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$; ж) $(1; 1,2)$; з) $(-\infty; 0)\cup(3,5; +\infty)$. **59.** а) $(-\infty; -7)\cup(\frac{1}{2}; +\infty)$; б) $[-\frac{9}{2}; 2]$; в) $(-\infty; -1)\cup(\frac{9}{2}; +\infty)$; **61.** 7; 8; 9. **63.** а) $(-\infty; -3)\cup(7; +\infty)$; б) $(-7; 6)$; в) $(-\frac{1}{2}; 3)$; г) $(-\infty; -4)\cup(4,5; +\infty)$. **64.** а) $(-6; 0)$; б) $(-\infty; 0)\cup(7; +\infty)$; в) $(-4; 3)$; д) $(-\infty; -1)\cup(3; +\infty)$. **65.** а) $(2; 4)\cup(9; +\infty)$; б) $(-\infty; -9]\cup[-1; 3]$; в) $(-\infty; -7)\cup(-1; 0)\cup(4; +\infty)$. **66.** а) $[-4; 0]\cup[4; +\infty)$; б) $(-\frac{1}{2}; 0)\cup\cup(\frac{1}{2}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3)\cup(-1; 1)$; г) $[-3; 3]\cup[4; +\infty)$. **67.** а) $(-15; 11)$; б) $[-3; 4]$; в) $[-1,5; \frac{1}{3}]$; г) $(\frac{3}{4}; 2)$. **68.** а) $(-\infty; -4]\cup[-1; 1]\cup[3; +\infty)$; б) $[-1; 1]\cup[2; 5]$; в) $[-3; 0]\cup[2; 3]\cup[4; +\infty)$; **69.** а) $[-9; 3,5]$; б) $(-\infty; -5]\cup[-4; 3]$; в) $(-3; 0)\cup(1; +\infty)$; г) $(-\infty; -5)\cup(6; +\infty)$; д) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; е) $[2; +\infty)$. **70.** а) $(-\infty;-10)\cup(8; +\infty)$; б) $(-\infty; 0,3]\cup(4; +\infty)$. в) $(-1,4; 1,9)$; г) $[-2; -1]\cup(1; 3)$;

д) $(-2; -1)\cup(0; 1)\cup(4; +\infty)$; е) $(-\infty; -5]\cup(-4; 0)\cup(4; +\infty)$. **73.** а) $-2,5$; б) -2; 2; в) нөлдөрү жок. **74.** а) $x\neq-\frac{1}{7}$ жана $x\neq3$; б) $[3; +\infty)$; в) $x\neq0$ жана $x\neq-\frac{4}{3}$; г) $[2; +\infty)$. **76.** а) $(2; -9)$; б) $(-1; 4)$; в) $(3; 1)$; г) $(-\frac{1}{2}; -\frac{25}{4})$. **78.** Бийиктиги менен негизи 150 м ге барабар. **79.** а) $\left[x+\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{10})\right]\left[x+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{10})\right]$; б) $0,8(x-25)(x+\frac{1}{4})=(x-25)(0,8x+0,2)$; в) $\frac{2}{3}(x-\frac{3}{2})(x-\frac{7}{2})=(\frac{2}{3}x-1)(x-\frac{7}{2})$; г) $\left[x-\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right]\left[x-\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$. **80.** а) $\frac{3(a-2)}{a+4}$; б) $\frac{2m-1}{n-3}$; в) $\frac{a-1}{a+2}$; г) $\frac{a+2}{a+1}$. **82.** а) -5; 1; б) 0; 1; 2. **83.** а) $(-\infty; 4)\cup(5; +\infty)$; б) $(5,7; 7,2)$; в) $(-5; 10)$; г) $(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$; д) $(-2; \frac{1}{2})$; е) $x\neq3$; ж) чыгарылыштары жок; з) $(-\infty; +\infty)$; и) $(-3; 2)\cup(3; +\infty)$; к) $(-\infty; -4)\cup(-1; 1)$; л) $(-\infty; -3)\cup(-1; 5]$; м) $(-1; -\frac{1}{2})\cup(1; 2)$. **84.** а) $(-\infty; -2)\cup(1; +\infty)$; б) $(-\infty; \frac{1-\sqrt{205}}{6})\cup(\frac{1+\sqrt{205}}{6}; +\infty)$; в) чыгарылыштары жок; г) $(-\infty; \frac{1}{2}]\cup[3; +\infty)$; д) $(-\infty; -\sqrt{3})\cup(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3})$; е) $(\frac{-9-\sqrt{261}}{10}; -1)\cup(\frac{\sqrt{261}-9}{10}; \frac{3}{4})$; ж) $(-\infty; -4)\cup(-1; 1)\cup(1; +\infty)$; з) $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}]\cup(1; 2]$. **85.** а) $(-4; -1]\cup[1; 4)$; б) $x\neq-2$. **86.** $\upsilon_{\text{катер}}\geq12$ км/саат. **87.** а) $(7; +\infty)$; б) $(0; 4)$; в) $(-1; 2)$; г) $(1; 4)$.

II глава

1. а) 3; 5; б) $-\frac{19}{3}$; 5; в) $\frac{1}{4}$; 3; г) -2; д) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; е) 0; $5,5$; ж) $\frac{4}{3}$. **5.** а) $(-\infty; \frac{9}{2})$; б) $(-\infty; \frac{4}{15})$; в) $(-\infty; -6)\cup(6; +\infty)$; г) $(-\infty; -\sqrt{20})\cup(\sqrt{20}; +\infty)$. **6.** а) Эгерде $a\in(-\infty; 5-4\sqrt{2}]\cup[5+4\sqrt{2}; +\infty)$ болсо, $x_{1,2}=\frac{1}{4}(a-1\pm\sqrt{a^2-10a-7})$, эгерде $a\in(5-4\sqrt{2}; 5+4\sqrt{2})$ болсо, чыгарылышы жок. б) Эгерде $a=0$ болсо $x=1$, эгерде $a\neq0$ болсо 1 жана $\frac{1}{a}$; в) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; г) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2; д) 0; 6) -4; 0; 1; 4. **7.** а) $1,5$; б) -5; 5; в) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; г) 6. **8.** а) $(-12; 12)$; б) $(\frac{1}{3}; +\infty)$; в) $(\frac{225}{8}; +\infty)$; г) $(-12; 12)$. **9.** б) 0; -1; 1; 3; д) 0; -3; 3; $2,5$; е) 0; 1; 4; ж) $1,5$. **10.** а) -3; 3; -4; 4; б) -3; 3; в) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1; 1; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{2}{3}$; д) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; е) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; -2; 2; ж) чыгарылышы жок. **11.** а) -2; 2; б) $1\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})}$; в) -3; 2; г) $-1,5$; 1; $\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{17})$; д) чыгарылышы жок. **12.** а) -1; 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) 1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; в) -2; 2; -1; 1; г) 1; $\sqrt[3]{2}$; д) -1; е) -3; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2. **13.** а) 1; б) -2; в) чыгарылышы жок; г) 4; д) 4; е) $\frac{7}{3}$; ж) 1; з) $\frac{9}{4}$; и) 5. **14.** а) $(10; -7)$, $(-3; 6)$; б) $(-2; -1)$, $(-1; 0)$; в) $(-3; 5)$, $(2; 10)$; г) $(2; 2)$, $(1; 3)$. **15.** а) $(3; 1)$; б) $(-2; -1)$; $(-1; -2)$; в) $(2; -1)$; $(1; -2)$; г) $(3; -1)$, $(-1; 3)$. **16.** а) $(-10; 4)$; $(-32; -18)$; б) $(12; 16)$; $(4; 0)$; в) $(\frac{3a+|a|}{2}; \frac{3a-|a|}{2})$; $(\frac{3a-|a|}{2}; \frac{3a+|a|}{2})$; г) $(\frac{3a+5|a|}{2}; \frac{-3a+5|a|}{2})$; $(\frac{3a-5|a|}{2}; \frac{-3a-|5a|}{2})$. **17.** а) $(\sqrt{10}; \sqrt{10})$, $(-\sqrt{10}; -\sqrt{10})$, $(4; 2)$, $(-4; -2)$; б) $(2; 1)$, $(-2; -1)$; в) $(2; 4)$, $(-2; -4)$. **109.** в) $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{7}}; -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$. **19.** а) $(4; 1)$, $(1; 4)$, б) $(6; 7)$, $(7; 6)$; в) $(4; 1)$, $(1; 4)$; г) $(1; 2)$, $(2; 1)$, д) $(1; 1)$; е) $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(2; 3)$, $(-2; -3)$. **20.** г) $(1; 1)$. **21.** а) $(0,5; 0,5)$, $(0,5; -0,5)$, $(-0,5; 0,5)$, $(-0,5; -0,5)$. *Көрсөтмө.* $u=|x|$ жана $\upsilon=|y|$ белгисиздерин кийиргиле; б) (1; 2), (1; –2); (–1; 2), (–1; –2), (2; 1), (–2; 1), (2; –1), (–2; –1); г) $(-1+\sqrt{6}; -1+\sqrt{6})$, $(-1-\sqrt{6}; -1-\sqrt{6})$, (2; 1), (1; 2); д) (2; 1), (–2; –1), $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{21}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{21}\right)$. **22.** а) (2; 1), (–2; –1). *Көрсөтмө* Биринчи теңдеме $z=\frac{x+y}{x-y}$ өзгөрмөсүнө карата квадраттык теңдеме болот; б) (2; 3), $(-\frac{3}{2}; -4)$. *Көрсөтмө.* Биринчи теңдемени экинчи теңдемеге бөлгүлө. в) (2; 1), (1; 2), (–3; 0), (0; –3), (1; –2), (–2; 1); г) (5; 2), (–2; –5). **23.** 800 км/саат, 600 км/саат. **24.** 4 км/саат. **25.** 6 саат. *Көрсөтмө.* x км/саат — биринчи поезддин ылдамдыгы, анда $(x+10)$ км/саат — экинчи поезддин ылдамдыгы. Шарт боюнча $\frac{120}{x}=\frac{120}{x+10}+1$. Мындан $x=30$. **26.** 5%. *Көрсөтмө.* x — аркылуу орточо жылдык өсүү процентин белгилейли, анда $20000+200x+0{,}01x(20000+200x)=22050$. Мындан $x=5$. **27.** 28 см жана 12 см же 24 см жана 16 см. **28.** 5 жана 7. **29.** 3 жана –4 же 4 жана –3. **30.** 24 жана 10 см. **31.** 60 жана 40 м. **32.** 210 см^2. **33.** 10 жана 6 саат. **34.** 60 жана 84 саат. **35.** 8 жана 12 саат. **36.** 1 кг жана 1,2 кг. **37.** 4 жана 5 км/саат. **38.** 60 жана 40 км/саат. **39.** 1 жана 7 кг. **40.** а) 0; –1; 1; б) 0; $\sqrt[3]{4}$; в) 0; $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; г) 1; 2; д) –1; $-\frac{1}{2}$; 1; е) –2; $\frac{4}{5}$; 5; ж) –1; $\frac{1}{6}$; 6. **41.** а) $-3-\sqrt{6}$; $-3+\sqrt{6}$; $-3+\sqrt{17}$; $-3-\sqrt{17}$; б) –2; 4; $1-\sqrt{5}$; $-1+\sqrt{5}$; в) –4; 0; г) $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{69})$; д) –4,5; 1; $\frac{1}{4}(-7-\sqrt{65})$, $\frac{1}{4}(-7+\sqrt{65})$; е) –5; 0; 5; ж) $-\sqrt{6}$; 0; $\sqrt{6}$; з) 1; и) 1; 8. **42.** а) 0; б) 0. **44.** а) $c>36$ болгондо; б) $-20<c$ болгондо. **45.** а) $0<k<42{,}25$ болгондо; б) $k=42{,}25$ жана $k<0$ болгондо. **47.** а) –1; б) $\frac{1}{3}$; в) [1; 2], г) $(-\infty; 2]\cup[3; +\infty)$; д) –1; 0; 1. **48.** а) 4; б) 8; в) 5. **49.** а) –1; б) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$; $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. **50.** а) (5; –2), $(-2; \frac{1}{3})$; б) (6; 2), (11; 7), в) (6; –1), (3; 5); г) $(-1\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$; (–5; –3); д) (4; 0), (0; –4); е) (0; –5), (5,5; 6). **51.** а) $m=-\sqrt{10}$ жана $m=\sqrt{10}$ болгондо; б) $-\sqrt{10}<m<\sqrt{10}$ болгондо. **52.** а) (–6; 2), (6; –2), (–2; 6), (2; –6); б) (–10; –8), (–10; 8), (10; –8) (10; 8); в) $(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$, (1; 1); г) $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. д) (3; 4), (3; –4), (0; 5); е) $(\sqrt{51}; -1)$, $(-\sqrt{51}; -1)$. **53.** а) (–4; –3), (–4; 2), (3; –3), (3; 2); б) (1; 3), (–1; –3); в) (–1; 1), (1; –1); г) (2; 1), (–2; –1), $\left(\frac{5}{\sqrt{7}}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{7}}; -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$. д) (0; 1), (0; –1). **56.** а) (0,5; 0,5), (0,5; –0,5), (–0,5; 0,5), (–0,5; –0,5). *Көрсөтмө.* $u=|x|$ жана $v=|y|$ өзгөрмөлөрүн кийиргиле. б) (1; 2), (1; –2), (–1; 2); (–1; –2), (2; 1), (2; –1), (–2; 1), (–2; –1); в) (2; –1), (–2; 1), (1; –2), (–1; 2); г) (1; 1), (–1; –1), (1; –1), (–1; 1). **149.** $a=-2$, $b=2$ же $a=-\frac{2}{3}$, $b=6$. **59.** 18 жана 12. **60.** 10 жана 0 же 26 жана 24. **61.** 36. **62.** $\frac{5}{4}$. **63.** 9 жана 12 см. **64.** 6 саат. **65.** 40 жана 50 км/саат. **67.** 1,64 жана 1,86 кг. *Көрсөтмө.* Биринчи идиште x кг кислота, ал эми экинчи идиште y кг кислота болсун. Анда $\frac{x+y}{10}=0{,}35$. Эгерде ар бир эритиндиден a кг дан алсак, анда $\frac{\frac{ax}{4}+\frac{ay}{6}}{2a}=0{,}36$, б.а. $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=0{,}72$.

III глава

1. б) экинчи, бешинчи, n , $(n+1)$чи; г) онунчу. **2.** б) 4, 7, 10; г) -2, 3, 8; е) 4, 16, 64; з) 10, 20, 40. **3.** б) 11, 6, 1, −4, −9; г) 0, 4, 18, 48, 100; е) 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$; з) −2, −4, −8, −16, −32; к) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001; м) 2, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{16}$, $1\frac{1}{25}$; о) −1, 1, −1, 1, −1. **4.** б) −26 жана −86; г) 1 жана $\frac{39}{59}$; е) 0 жана 0. **5.** б) $2n-18$, $2n-22$, $2n-10$; г) $7(\frac{1}{2})^{n+4}$, $7(\frac{1}{2})^{n+2}$, $7(\frac{1}{2})^{n+8}$. **6.** 2, 2, 6, 30, 210. **7.** 1, −2, −11, −38. **8.** 1,5. **9.** −7. **10.** б) $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, $a_{n+2}^2=a_n^2+2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2$, $a_{n+2}^2-a_{n+1}^2=a_n^2+2a_na_{n+1}=a_n(a_n+$ $+2a_{n+1})=a_n((a_n+a_{n+1})+a_{n+1})=a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_na_{n+3}$. **13.** б) 79; г) −42; е) $-5\frac{1}{3}$. **14.** б) 2; г) 0,5; е) −4. **15.** 7,2, −3. **16.** б) $-4n+29$; г) $-5n+6$; е) $-\frac{1}{3}n+2\frac{1}{3}$; з) $-n+b+3$; к) $-2n+\sqrt{5}$. **17.** б) $25-4(n-1)$; г) $-20-6(n-1)$. **18.** 12. **19.** Ооба, $n=11$. **20.** б) 15. **22.** Бирдей беш мүчө. **23.** 44,1 м. **24.** Бейшенби күнү. **25.** Он күн. **26.** б) 14, 11, 8, 5, 2. **27.** −57 жана 7. **28.** б) 0 жана −108. **29.** 60°. **30.** −5, −3, −1, 1. **31.** −5, −3,5, −2, −0,5, 1. **32.** −5, −3,8, −2,6, −1,4, −0,2, 1. **36.** б) 30. **37.** 15. **38.** б) 10050; г) 2550; е) 143; з) $25+25\sqrt{3}$; к) $14b$. **39.** 22650. **40.** 4489. **41.** 1924. **42.** 1734. **43.** $336a$. **44.** $144b^2$. **45.** б) 1705; г) 507; е) 192; з) 20. **46.** б) 12012; г) 336; е) −22; з) −20,8. **47.** б) 2900. **48.** 44. **49.** 5 жана 2. **50.** б) $15\frac{5}{6}$ жана $1\frac{1}{2}$; г) $-1\frac{2}{3}$ жана $-\frac{2}{15}$. **51.** б) $-72\frac{8}{11}$ жана $16\frac{27}{55}$. **52.** 78 устун. **53.** 407 орундук. **54.** б) 15 тепкич. **56.** б) $\frac{1}{4}(\frac{2}{3})^{n-1}$; г) $3(-\frac{4}{3})^{n-1}$; е) $(-2)^n$; з) 2^{n-2}; к) $(-1)^{n-1}b^{4-n}$. **57.** б) $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{8}$. **58.** б) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{81}$; е) 27. **59.** б) $\pm\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{5}$. **60.** б) 7; г) 7; е) 7; з) 8. **61.** 7. **62.** б) $3\cdot2^{n-1}$; г) $3\cdot4^{n-1}$ же $-3\cdot(-4)^{n-1}$; е) $-243(\frac{1}{3})^{n-1}$; з) $(2p)^{n-1}$. **63.** б) −27; г) $\frac{1}{25}$ же $-\frac{1}{25}$. **64.** Бирдей тогуз мүчөсү. **65.** б) $q=3$, $b_1=-4,5$; г) $q=-\frac{1}{4}$, $b_1=-\frac{1}{64}$. **66.** б) ±3 жана −2; г) 3 жана $-\frac{1}{3}$ же −3 жана $\frac{1}{3}$. **68.** 3182 сом 70 т. **69.** $\frac{1}{4}$ см^2. **70.** б) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{27}{128}$. **71.** $3\sqrt{3}$ жана $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **72.** 6 жана $30\frac{3}{8}$ же −6 жана $-30\frac{3}{8}$. **73.** б) $\pm\frac{1}{12}$; г) ±18; е) ±1. **74.** ±486. **75.** $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32. **76.** $\frac{1}{2}$; $\pm\sqrt{2}$; 4; $\pm8\sqrt{2}$; 32. **77.** b, $b\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, $b\sqrt[3]{(\frac{c}{b})^2}$. **78.** $a=b=c$ болгондо. **81.** а) 54; б) 72. **82.** $3\frac{255}{256}$; г) −400; е) $1\frac{85}{256}$; з) 5. **83.** б) 242; г) $13\frac{1}{3}$; е) 242; з) $1\frac{29}{36}$. **84.** б) 364; г) 305; е) 388,8885. **85.** 4802 жана 800. **86.** б) −1 жана 128; г) 9 жана 2048; е) 5 жана 7; з) 2 жана 2 же 18 жана $-\frac{2}{3}$; к) −3 жана 135 же 2 жана 60. **87.** $-1\frac{31}{32}$. **88.** б) 2 же $-\sqrt[3]{7}$; г) 781 же 521. **89.** $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. **91.** а), б), г), д), ж) учурларында болот. **92.** б) $n\geq11$; г) $n\geq10$. **93.** б) $7\frac{1}{5}$; г) $-8\frac{1}{6}$; е) $-\frac{4}{5}$; з) $90\frac{10}{11}$. **94.** б) 1,5; г) $\frac{2}{3}$; е) $4\sqrt{3}+6$. **95.** б) 1,5; г) $-\frac{1}{4}$. **96.** б) $180-36+\frac{36}{5}-\frac{36}{25}+\cdots$; г) $50+\frac{100}{3}+\frac{200}{9}+\cdots$. **97.** б) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{7}{33}$; з) $\frac{41}{90}$. **98.** $2a$. **102.** 1, а) −1; 2; −3; 4; −5, 6; б) 0; −3; −8; −15; −24; −63; в) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$. **104.** а) 10; 20; 30; 40; 50; 60; $a_n=10n$; б) 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; 10^6; $a_n=10^n$. **108.** 1; 3.

109. 14; −7; 8. **110.** 5; 8; 11; 14; 17. **111.** 25 см, 40 см, 55 см, 115 см. **112.** Мындай сандар 300 жана алардын суммасы 165150. **113.** а) 1, 11, 21, ... **114.** а) −744. **115.** а) 1605; б) 1210. **116.** а) 1600. **118.** а) $\frac{1}{18}$; б) $12\sqrt{6}$. **120.** 1 же 2. **122.** $\frac{3}{4}$. **123.** а) 3; 2; б) −5; ±2. **124.** а) −3; −2; 10; б) 1; 2; 5. **125.** 121 жана $11\frac{5}{16}$. **126.** 765. **127.** 2. **128.** 9; 6; 4; $2\frac{2}{3}$. **129.** 1, 3, 9, . . . жана 9, 3, 1, ... **130.** а) 2, б) $\sqrt{2}$; в) 2. **131.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **132.** а) $2\frac{7}{660}$; б) $\frac{1}{900}$. **134.** а) $\frac{2}{9}$; б) $2\frac{7}{9}$; в) $1\frac{1}{3}$; г) $2\frac{7}{33}$; д) $1\frac{3}{11}$; е) $\frac{19}{99}$; ж) $3\frac{38}{111}$; з) $\frac{901}{999}$. **135.** $65\frac{5}{11}$ мин. **136.** а) 24 см.; б) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2. **137.** а) $4a(2+\sqrt{2})$; б) $2a^2$; в) $\pi a(2+\sqrt{2})$; г) $\frac{\pi a^2}{2}$.

IV глава

3. д) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ **4.** а) x^2y-xy^2; б) $x^{-1}-x$; **6.** а) 2; в) $m-1$. **7.** 6. **24.** т) $-a$. **25.** е) $\sqrt{3}-1$; л) $\sqrt{101}-7$. **26.** а) $5-a$; б) $a-5$. **27.** а) $y-x$; б) $x-y$; д) $m-n$; е) $n-m$; ж) $-|b-a|$; з) $a-b$. **29.** б) $x\le2$; в) $x\ge\frac{5}{3}$; д) $x\in R$; е) $\frac{2}{3}\le x<2$; ж) $x\ne1$; з) $x\in R$. **31.** б) 4; д) 5; е) 6. **32.** а) $\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2a}{b^2}$. **35.** и) 7!; о) 0,6. **36.** д) $\frac{3}{2}$; е) $-\frac{3}{2}$. **37.** б) 64; в) a^2; д) 18; ж) 0,01. **38.** б) a; е) 4; ж) 2; л) $\sqrt[4]{a}$. **42.** а) 10; г) 2; ж) 36; з) 4; к) 32. **44.** а) 3; г) −1; к) 625. **45.** а) $\sqrt{2}$; ж) $\sqrt[6]{a^5}$. **46.** в) $2x^2y^4z^6$. **47.** г) $\frac{2}{b}$; д) $\sqrt[3]{a^3+b^3}$. **48.** а) $a^2\sqrt[4]{a}$; е) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{a-b}$. **49.** д) 3; ж) 3. **50.** ж) $a^{12}b^8c^6d^4k^3$; з) 1. **51.** а) $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{5}>\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}$. **52.** б) −; д) +. **53.** б) $0{,}5\cdot\sqrt[4]{75}$; в) 2,5. **54.** а) 2,8; д) 0,5. **55.** в) 7; г) 1. **57.** в) $2\sqrt[4]{b}$; г) 1. **62.** з) 0,0016. **63.** б) болбойт; д) болбойт. **64.** в) $|x|\ge0$; д) $b\ne0$; е) $c\ne5$; з) $y\in R$; и) $y>4$. **67.** б) >; в) <; г) =; е) >. **70.** в) 3; ж) 1. **71.** в) 8. **72.** б) 121; г) 150. **73.** а) 4; б) 2; г) $\frac{1}{49}$; е) $3\sqrt[3]{3}$. **74.** в) 1,3. **75.** д) x^7; з) x. **76.** д) a. **77.** д) 1; ж) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **78.** б) $b^{\frac{1}{2}}$; г) $a+b$; д) $\sqrt[4]{b}$. **79.** б) 3; в) 6. **81.** б) $x=y^{\frac{3}{2}}$; г) $x=(\frac{y}{5})^{\frac{5}{4}}$; е) $x=y^{0,125}$. **82.** г) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **83.** а) 10α; д) $10^{-1}\alpha^{-1}$; е) $\sqrt[4]{10}\sqrt{\alpha}$; ж) $\alpha\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}$. **85.** е) −4; ж) 80; з) 3. **86.** а) $a\sqrt{x}+\sqrt{a}x$; ж) $x^{\frac{3}{2}}+1$. **87.** д) $x+y$; е) $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$. **88.** в) $-2\cdot\sqrt[4]{bc}$; е) $x-1$; з) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$. **89.** а) $x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-2)$; г) $a^{\frac{1}{5}}(b^{\frac{1}{5}}-c^{\frac{1}{5}})$; з) $3^{\frac{1}{3}}(1-67^{\frac{1}{2}})$. **90.** б) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; е) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; ж) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$. **92.** а) $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}})$ же $(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$. **93.** а) $(\sqrt[6]{a})^3+(\sqrt[6]{b})^3=(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[6]{b^2})$. б) $(x^{\frac{1}{27}})^3-(y^{\frac{1}{27}})^3=(x^{\frac{1}{27}}-y^{\frac{1}{27}})(x^{\frac{2}{27}}-(xy)^{\frac{1}{27}}+y^{\frac{2}{27}})$. **95.** а) $(a^{\frac{1}{20}})^2-(b^{\frac{1}{20}})^2=(a^{\frac{1}{20}}-b^{\frac{1}{20}})(a^{\frac{1}{20}}+b^{\frac{1}{20}})$. **96.** е) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; з) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$; к) $a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}$. **97.** а) $\frac{35+10\sqrt{77}-21\sqrt{11}-29\sqrt{7}}{259}$; д) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{2}$. **98.** б) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$; ж) $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})(2+\sqrt{3})$; з) $a(\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$. **99.** а) 1. **100.** а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$. **101.** а) 4; б) 3; г) 13. **102.** а) 81; д) 9. **103.** б) $\frac{1}{9}$. **106.** г) Биринчиси чон; е) барабар сандар; ж) экинчиси чон. **107.** г) $x=2$; д) $x=-2$; е) $x=\frac{1}{2}$. **108.** в) Биринчиси чон; г) биринчиси чон. **109.** г) $y=5$; д) $x=3$. **110.** в) $x=-6$. **111.** в) $x=-4$. **112.** в) −2. **113.** а) 12!; б) 10!; в) 7!.

114. г) $\frac{7}{4}$; д) $-\frac{4}{3}$. **115.** г) $-\frac{2a^2bc^3}{3x^4y^6}$. **116.** б) $-a^{-2}b^{-3}$; ж) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{y}{x^2}$. **117.** а) $n=3$; в) $n=4$. **118.** а) Болбойт; б) $n=8$. **119.** а) Экөө; б) жок; д) бирөө; ж) экөө; з) бирөө. **120.** в) 0; г) $\frac{7}{2}$. **121.** а) $x=5$; б) $x=\pm6$; ж) $x=1$; з) $y=-8$. **123.** б) $x\leq9$; г) $a\leq2$, $a\geq5$; е) $2\leq a\leq4$; ж) $1\leq x\leq3$. **124.** а) $x\geq3$; в) $x\in R$. **125.** а) $\sqrt{9}$ эсе. **126.** а) $q=2$. **127.** а) $x=\pm1$. **128.** а) $x=125$, $x>125$, $x<125$. **129.** а) $-$; б) $+$. **130.** б) $x\leq\frac{5}{2}$; д) $x\neq-3$; е) $x\in(-\infty;-2)\cup[1;\infty)$. **132.** а) Бирөө; б) жок; в) бирөө. **135.** а) $\frac{1}{25}\sqrt[3]{3\cdot25^2}$; в) $\sqrt{2}+1$; г) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$. **137.** а) $x_1=0$, $x_2=64$; б) $x=10^{-6}$; в) тамыры жок. **140.** а) $x=18$; б) $x=2\pm\sqrt{2}$; в) тамыры жок. **142.** Мисалы: а) $x=8$, $y=4$. **143.** а) $xy=1$; б) $x=y^2$. **144.** б) 1; г) $\frac{a}{b}$. **152.** б) -3; г) $\frac{25}{16}$. **158.** в) $\frac{95}{16}$; д) $-609\frac{8}{27}$. **159.** б) $\sqrt[4]{x}$. **160.** б) $x=-1$; г) $x=1$. **161.** б) $a+1$. **162.** $a\approx4{,}64$; $R\approx2{,}88$; $2R>a$.

V глава

1. а) $\frac{\pi}{36}$; б) $\frac{10\pi}{9}$; в) $\frac{16\pi}{9}$; г) $\frac{35\pi}{9}$; д) 15π. **2.** а) 120°; б) 135°; в) 270°; г) $22^\circ30'$; д) 12°. **3.** а) $\sin20^\circ$; б) $-\mathrm{tg}20^\circ$; е) $-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$; з) $-\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{5}$. **4.** а) $\cos x$; б) 1; в) 1; г) $1-\cos^2 10^\circ$; д) $2\mathrm{tg}\beta$; е) $\mathrm{tg}x\cdot(\sin x-\cos x)$. **6.** а) $-\frac{4}{5}$; г) $-\frac{117}{125}$; е) $\frac{44}{117}$. **7.** а) $\frac{1}{72}(28\sqrt{2}+7\sqrt{15})$. **8.** а) $-\cos(\alpha-\beta)$; в) $\sin\beta$; г) $\mathrm{tg}2\alpha$; е) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **10.** а) 1; б) 1. **11.** а) эгер $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ болсо, анда $\frac{5}{8}$; б) эгер $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, анда $\frac{15}{8}$.

VI глава

1. 1. **2.** 0. **3.** а) 0; б) 1. **4.** а) 5; б) 2. **5.** 14. **6.** а) 2; б) 1, -11. **7.** 1. **8.** $(1;-6)$, $(-1;-6)$. **9.** 1. **10.** 2; -16; 24. **11.** -4; 4; 24. **12.** 3; -36; 96. **13.** 2, 8, 15. **14.** а) $(x-a-b)(x-a+b)$; б) $(2x-9a)(2x-a)$; в) $(ax-b)(bx-a)$; **15.** а) $\frac{a+13}{a+15}$; б) $\frac{a-7b}{a+b}$ **17.** а) -5; б) 15; в) a^2-b^2. **18.** -2. **19.** а) 1; $\frac{1}{2}$; б) 8; -3; в) 7; $-\frac{7}{9}$; г) 5; $-1\frac{2}{5}$. **21.** $(1;-2)$, $(0;0)$. **22.** а) 0; б) 1; $-\sqrt[3]{6}$; в) 0; г) 0; -2. **23.** а) 3; 1; б) 2; -4. **24.** а) 4; -1; б) 4; -5. **25.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **26.** 21; 28. **27.** 21 см, 23 см. **28.** $\frac{8\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$ см. **29.** $\frac{100}{3}$ см. **30.** 140 м. **31.** 28 м. **32.** 108 см. **33.** 21 катар. **34.** 80 км/саат, 70 км/саат. **35.** 20 км/саат. **36.** а) $x\in R$; б) $x\in(1;1{,}5)$, $x>2$; в) $x>2$, $x<-\frac{1}{3}$. **37.** а) $-2<x<1$; б) $-\infty<x<\frac{7-\sqrt{13+4\sqrt{26}}}{2}$; $\frac{7+\sqrt{13+4\sqrt{26}}}{2}<x<\infty$; в) $0<x<1$; $1<x<2$; г) $-\infty<x<-3$; $-2<x\ -1$; $1<x<2$; $3<x<\infty$. **38.** а) $-5<x<-1$; $-1<x<-\frac{1}{3}$; $5<x<\infty$; б) $-\infty<x<-5$; $-5<x<-3$; $-3<x<-2$; $-2<x<\infty$. **39.** а) $(-\infty;-2)\cup(-1;0]$; б) $(-8;1]$; в) $[-1;2]$. **46.** а) $(0{,}25;7{,}75)$, $(-2;1)$; б) $(17;10)$, $(4;-3)$. **47.** а) $(0;0)$, $(-2{,}4;4{,}8)$; б) $(6;9)$, $(-9;-6)$. **48.** а) $(8;4)$, $(4;8)$; б) $(5;1)$, $(-1;-5)$; в) $(2;3)$, $(3;2)$; г) $(3;0)$, $(1;-2)$. **49.** а) $(4;2)$, $(16;-10)$; б) $(3;2)$, $(2;1)$. **50.** а) $(3;1)$, $(1;3)$; б) $(5;2)$, $(-2;-5)$. **51.** а) $(\pm5;\pm3)$, $(\pm3;\pm5)$; б) $(1;4)$, $(4;1)$. **52.** а) $(4;2)$, $(2;4)$; б) $(5;-2)$, $(2;-5)$. **53.** а) $(2;1)$, $(1;2)$; б) $(5;20)$, $(20;5)$.

54. а) (2; 3), (3; 2), (−6; 1), (1; −6); б) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (2; −1), (−1; 2), (−2; −1), (−1; −2). **55.** 40. **56.** а) (1; 3); б) (1; −2). **57.** а) (1; 2), (1; −2), (−1; 2), (−1; −2); б) (1; 1), (−1; 1). **58.** 10 см, 4 см. **59.** 15 см, 8 см. **60.** 40 см, 9 см. **61.** а) 36; 4; б) (9; 25). **62.** 32. **63.** 30 км/саат, 24 км/саат; **64.** 48; 60. **65.** $A=1$, $B=2$, $C=0$. **66.** а) 6,24,60; б) 5,13,35, в) 56, 448, 3584; г) $-1, 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **67.** а) $-\frac{1}{3}, \frac{29}{16}, \frac{61}{32}$; б) $\frac{16}{13}, \frac{23}{27}, \frac{39}{59}$; в) 3, −4, 10; г) 91, 77, 45. **68.** $\frac{11}{16}$. **70.** а) −3100; б) 1313. **71.** 400. **72.** 210. **73.** 1, 9, 17. **74.** а) $b_n=(-1)^n 2^n$; б) $-0{,}5\,(-1)^{n-1}$.

75. б) $1\frac{85}{256}$; г) 3. **76.** б) 242; в) $\frac{781}{381}$; г) $\frac{65}{36}$. **77.** 6. **79.** 14. **80.** б) −27; г) $\pm\frac{1}{25}$. **81.** 6. **82.** а) 29; б) 7; в) 7. **83.** 1275. **84.** $\frac{119}{3}$. **85.** 16. **86.** 2470,5. **87.** $a_1=2$, $d=-3$; $a_1=-10$, $d=3$. **88.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. **92.** 98. **93.** 1064. **96.** $2n+1$. **98.** 64. **99.** 1, 2, 3. **100.** (2, 4, 8, ...). **101.** 18, 6, 2. **102.** $n=9$. **105.** $S_n=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)\cdot x^{2n}}+2n-1$. **106.** а) $\frac{1}{2}, -\frac{7}{9}$; б) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. **107.** а) $99\frac{7}{12}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{49}{90}$. **108.** а) $a>0\Rightarrow x>0$; б) $a<0\Rightarrow x<0$; в) $a=0\Rightarrow\downarrow$ болбойт; **109.** $y=1+x^2$, $x\neq 0$ функциясынын графиги; **110.** $2\pi r^2$, $4r^2$. **111.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **112.** $q=\frac{3}{5}$. **113.** $S=9$. **114.** $b_1=14$, $q=\frac{3}{4}$. **115.** $b_1=2$, $q=\frac{1}{3}$. **116.** (2,4,8). **117.** (3, 15, 75), (31,31,31). **124.** $S_4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$; **128.** а) ±1; $\pm\sqrt[7]{7}$; б) 1. **130.** а) $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$; б) $x\in R$; в) [−1;1]; г) $x\in R$. **131.** а) $(-\infty;-4)\cup[3;\ 3\frac{9}{13}]$; б) $x>3\frac{9}{13}$; в) [−46;3]; г) $x\in R$; д) $x\in\phi$. **134.** а) 2. б) −9. **135.** а) 6; б) 0,1. **141.** а) 4; б) 2; в) −1,5. **142.** а) 1; б) $53\frac{1}{3}$. **143.** а) $\frac{31}{3}$; б) $\sqrt[12]{32}$. **144.** а) $\sqrt[3]{a^2}$. **145.** а) $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$; б) ax; в) $m+n$. **147.** б) $\sqrt{x}$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{|x|}$. **148.** а) <; б) >; в) =; г) <. **149.** а) $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt{13}+3)$; б) $\frac{-(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})}{2}$; в) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$; г) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a}$. **150.** а) $1-\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$; б) $\frac{(5+\sqrt{3})^5}{22^5}$; в) $3\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; г) $\frac{1}{5}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})$; д) $a(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **151.** а) $x=10$; б) 1; 3; в) $-2<x<1$; г) $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$. **153.** а) 3; б) 1; −4. **154.** а) $-\frac{1}{4}$. **155.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 14. **156.** а) 5; б) 8; в) $\frac{3}{2}$. **157.** а) 7; б) −1; в) 4. **158.** а) 2; б) −0,75; в) $\sin\alpha$. **159.** а) $\frac{3b-b^3}{2}$; б) c^4-4c^2+2; в) m. **160.** а) $\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1)$; б) $\frac{8}{9}$; в) 0,2. **161.** а) 6; б) $\frac{3a^2+1}{4}$; в) $\frac{p+q}{p-q}ctg\alpha$; г) $b=a^2-2$. **162.** а) $1-\frac{3}{4}(a^2-1)^2$; б) $\frac{b+b^3}{2}$. **163.** а) $4\sin\alpha$; б) −1; в) −1. **164.** а) $2\mathrm{tg}2\alpha$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$. **165.** а) $\sin\alpha-\cos\alpha$; б) 1; в) $\cos4\alpha$; г) $\mathrm{ctg}^4 2\alpha$. **166.** б) 1,5. **173.** а) $a=1$; б) $3a+2b=6$. **174.** $S=\frac{1}{2}c^2(q^2-1)$. **176.** а) 30π; б) $\mathrm{tg}1>\mathrm{tg}50^\circ$. **177.** $4x^3-3x-a=0$.

МАЗМУНУ

I глава

КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ

II глава

ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

III глава

АРИФМЕТИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯЛАР

Окуу басылмасы

Иманалиев Мурзабек, Асанов Авыт,
Жусупов Калыгул, Искандаров Самандар

АЛГЕБРА

Жалпы билим берүүчү орто мектептин
9-классы үчүн окуу китеби

Оңдолуп, үчүнчү басылышы

Редактору *М. Касымалиев*
Көркөм редактору *Д. Тимур*
Корректору *Р. Сакелова*
Компьютердик калыпка салган *Б. Тимуров*
Техникалык редактору *В. Крутякова*

Басууга 14.05. 2012-ж. кол коюлду. Офсет кагазы № 1. Форматы 60 x 90 $^{1}/_{16}$.
«Мектеп» ариби. Офсет ыкма менен басылды. Көлөмү 14,0 физ. басма табак.
Нускасы 81 150. Заказдын № 111.

«Билим-компьютер» басмаканасында даярдалган жана бекитилген
сигналдык нускасы, «ST.art LTD» ЖЧК типографиясында басылды

«Билим-компьютер» басмасы
720065, Кыргыз Республикасы, Бишкек ш., «Восток-5» кичи р-ну, 14/2

«ST.art LTD» ЖЧК
720040, Кыргыз Республикасы, Бишкек ш., Тыныстанов көч., 199-46